

# バックステッピングによる鋼球の位置決め制御

2008MI172 野田祐利

指導教員：陳幹

## 1 はじめに

現在、自動車において、制御システムにより動いている主要な部品は数多くある。電子スロットル、可変バルブ、パワースライドドアといったものが挙げられる。これらの技術に共通しているのは、モータにより制御されている点である。このようにモータ制御系は自動車において必要不可欠である。今回の研究では同じようにモータにより制御されているボール&ビームを制御対象とする。これはモータによってビームの角度を変えビーム上の鋼球の位置を制御するものである。また制御系設計にはバックステッピング制御を適用する。

## 2 バックステッピング

本研究ではバックステッピング設計手法を用いる。これはボール&ビームのモデルが、まず、電流の入力によりモータの回転を制御し、モータの回転により鋼球の位置を制御するという、2つのステップから構成されるモデルという点からである。バックステッピング制御は複数階層システムを考えて、各サブシステム毎に安定化させることができれば、システム全体の安定性を補償できる。またバックステッピング制御では非線形減衰項を用いてモデリング誤差や外乱の影響を抑え込むことができる。以上の点からバックステッピング制御がこのシステムに対して有効であると考えられる [3],[4],[5]。

## 3 モデリング

本研究の制御対象であるボール&ビーム装置はモータを駆動し出力軸の回転角度を変化させ、レバーアームを介してビーム角度を制御することにより鋼球を目標の位置に収束させる実験装置である。本研究ではこの実験装置を電流から回転角度を出力するモータ系と、回転角度から鋼球位置を出力するビーム系の二つのモデルで考える [1],[2]..

### 3.1 モータ系

モータの入力電流によりギアの回転運動の運動方程式を以下のように定式化する [1],[2]。

$$\ddot{\theta} = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}}\dot{\theta} + \frac{\eta_g\eta_m K_g K_t}{J_{eq}} I \quad (1)$$

ここで  $\theta$ [radian] は出力回転角度、 $I$ [A] は入力電流、 $B_{eq}$ [Nm/rad/s] は等価慣性摩擦、 $J_{eq}$ [kgm<sup>2</sup>] は等価慣性モーメント、 $\eta_g$  はギア効率、 $\eta_m$  はモータ効率、 $K_g$  はギア比、 $K_t$ [Nm] はモータトルク定数である。

### 3.2 ビーム系

モータ系の出力により傾きが変化するビーム系のモデルを図1に示す [1],[2]。

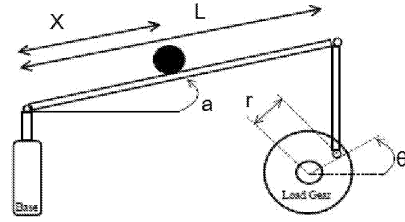


図1 ビーム系モデル

ビーム系のモデルを以下のように定式化する [1],[2]。

$$\ddot{x} = \frac{mgR^2r}{L(R^2m + J)} \sin\theta \quad (2)$$

ここで  $x$ [m] は鋼球の位置、 $m$ [kg] は鋼球の質量、 $g$ [m/S<sup>2</sup>] は重力加速度、 $R$ [m] は鋼球の半径、 $J$ [kgm<sup>2</sup>] は鋼球の慣性モーメント、 $r$ [m] は回転するギアの中心からレバーアームまでの距離、 $L$ [m] はビームの長さである。

## 4 制御系設計

制御対象のモデルはモータ系とビーム系の2つのステップから構成される。バックステッピング制御は各ステップを安定であるように設計すれば、全体の制御系の安定性が補償される。よってモータ系とビーム系にそれぞれ制御系設計を行っていきまずモータ系から回転角度  $\theta$  を出力し、 $\theta$  によりビーム系の鋼球の位置と速度を制御する。

### 4.1 モータ系

まず回転角を制御するサブシステム  $S_0$  を考える (1) 式からもわかるようにモータ系のモデルは線形である。よってPI制御にて制御系設計を行う。式1の入力  $I$  をPI制御で設計すると以下ようになる。

$$I = -c_{0p}\theta - c_{0i} \int \theta dt \quad (3)$$

ただし  $c_{0p} > 0, c_{0i} > 0$  である。よってモータ系のサブシステム  $S_0$  は以下ようになる。

$$S_0 : \ddot{\theta} = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}}\dot{\theta} - \frac{\eta_g\eta_m K_g K_t}{J_{eq}}(c_{0p}\theta + c_{0i} \int \theta dt) \quad (4)$$

この出力  $\theta$  によりビーム系を制御していく。

### 4.2 ビーム系

ビーム系には  $\sin\theta$  が含まれており、非線形となっている。よってビーム系の制御系設計はバックステッピング制御で行う。これはバックステッピング制御は非線形でも対応できるという特徴から用いる。鋼球の位置を  $x_1$ 、速度を  $x_2$ 、位置誤差を  $z_1$ 、速度誤差を  $z_2$  とし、以下のように定義する。[6]。

$$z_1 = x_1 - y_r \quad (5)$$

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (6)$$

まず鋼球の位置のサブシステム  $S_1$  を考える。 $y_r$  は鋼球の目標位置、 $\alpha_1$  は  $z_1$  を制御するための仮想入力である。(5) 式を (6) 式に代入してサブシステム  $S_1$  を得る。

$$\begin{aligned} S_1 : \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= x_2 - \dot{y}_r \\ &= z_2 + \alpha_1 - \dot{y}_r \end{aligned} \quad (7)$$

この  $\alpha_1$  を PI 制御で設計する

$$\alpha_1 = -c_{1p}z_1 - c_{1i} \int z_1 dt + \dot{y}_r \quad (8)$$

ただし  $c_{1p} > 0, c_{1i} > 0$  とする。よってサブシステム  $S_1$  を下記のように得る。

$$S_1 : \dot{z}_1 = z_2 - c_{1p}z_1 - c_{1i} \int z_1 dt \quad (9)$$

次に鋼球の速度のシステム  $S_2$  について考える。またサブシステム  $S_2$  は

$$\begin{aligned} S_2 : \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \alpha_1 \\ &= c_{1p}\dot{z}_1 + c_{1i}z_1 + \frac{mgR^2r}{L(R^2m + J)} \sin\theta \end{aligned} \quad (10)$$

この  $z_2$  を非線形減衰項を用いて設計する。非線形減衰項によりモデリング誤差や外乱に対してロバスト性を補償したシステムを設計する。

まず入力  $\sin\theta$  を下記のように決定する。

$$\sin\theta = \frac{L(R^2m + J)}{mgR^2r} (\alpha_{20} - \alpha_{21} - \alpha_{22}) \quad (11)$$

ただし  $\alpha_{20}$  はモデリング誤差がない時の制御入力

$$\alpha_{20} = -c_2z_2 - c_{1p}z_1 - c_{1i}z_1 \quad (12)$$

$\alpha_{21}$  はモデリング誤差に対する非線形減衰項

$$\alpha_{21} = k_{21}z_2 \quad (13)$$

$\alpha_{22}$  は外乱に対する非線形減衰項

$$\alpha_{22} = k_{22}z_2 \quad (14)$$

ただし  $c_2 > 0, k_{21} > 0, k_{22} > 0$  である。

よって (10) 式は以下ようになる。

$$S_2 : \dot{z}_2 = -c_2z_2 - k_{21}z_2 - k_{22}z_2 \quad (15)$$

以上がバックステッピング制御のサブシステム  $S_0 \sim S_2$  である。 $S_0$  では入力  $I$  により回転角度  $\theta$  を制御する。 $S_1$  では鋼球の位置を制御し、 $S_2$  では鋼球の速度を制御する。この3つのサブシステムがそれぞれ安定であるならばシステム全体の安定性を示すことができる [5]。

## 5 安定性解析

各サブシステムの安定性を示し、システム全体の安定性を示す。まず回転角度  $\theta$  について考える。(4) 式を微分演算子  $s$  を用いて書き直す

$$\theta(s) = \frac{J_{eq}}{J_{eq}s^3 + B_{eq}s^2 + (c_{0p}\eta_g\eta_m K_g K_t)s + c_{0i}\eta_g\eta_m K_g K_t} \quad (16)$$

$c_{0p}, c_{0i}$  が以下のフルビッツ行列  $H$  を満たせば安定である。

$$H = \begin{bmatrix} B_{eq} & c_{0i}\eta_g\eta_m K_g K_t \\ J_{eq} & c_{0p}\eta_g\eta_m K_g K_t \end{bmatrix} > 0 \quad (17)$$

次に位置誤差  $z_1$  について考える。 $\dot{z}_1$  を微分演算子  $s$  を用いて書き直す。

$$Z_1(s) = \frac{sZ_2}{s^2 + sc_{1p} + c_{1i}} \quad (18)$$

つまり速度誤差  $c_{1p} < 0, c_{1i} < 0$  ならば  $z_1$  は安定である。同様に速度誤差  $z_2$  について考える。 $\dot{z}_2$  を微分演算子  $s$  を用いて書き直す。

$$Z_2(s) = \frac{1}{s + c_2 + k_{21} + k_{22}} \quad (19)$$

分母部分の  $c_2 + k_{21} + k_{22} > 0$  ならば速度誤差  $z_2$  は安定であると言える。またこの値が大きければ収束までの時間も早くなる。よってサブシステム  $S_0, S_1, S_2$  は安定であると言えるのでシステム全体も安定であるといえる。

## 6 シミュレーション

以上を踏まえてシミュレーション。実験を行った結果は図 2,3 の通りである。

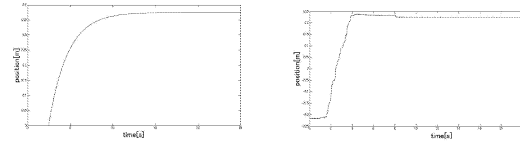


図 2 シミュレーション結果 図 3 実験結果  
シミュレーションでは目標値 0.4m に対して少し偏差はあるが収束している。実験ではオーバーシュートが見られるが目標値に収束している。

## 参考文献

- [1] 筧菜帆:H2 制御理論によるレール上での鋼球の位置決め南山大学数理情報学部 2012 年度卒業論文 (2012)
- [2] 柴田佳奈:ボール&ビームの位置決め制御に対する最適レギュレータとH制御の比較検討, 南山大学数理情報学部 2012 年度卒業論文 (2012)
- [3] 福島楊一郎:K-filter と外乱オブザーバを用いた磁気浮上系の出力フィードバックロバスト制御, 九州大学工学部 2008 年度卒業論文 (2008)
- [4] 楊子江:バックステッピング設計手法を用いた磁気浮上系の非線形制御, 計測自動制御学会論文集 Vol.35, No1, 85/90(1999)
- [5] Zi-Jaung Yang: A Novel Robust Nonlinear Motion Controller With Disturbance Observer, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 16, No. 1, 137/147 (2008)
- [6] 鈴木啓太:非線形特性を持つ磁気浮上系システムの制御南山大学数理情報学部 2012 年度卒業論文 (2012)