置換群とルービックキューブ

2008MI290 吉川翔太
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

ルービックキューブは，インターネットや本などを利用してまわし方を調べれば，6 面完成させることができる．ある程度ルービックキューブが好きな人ならば，6 面完成させるための方法や，まわし方を覚えている．しかし，その方法やまわし方はどのように考えられたのかという疑問を抱いた．そこで，本研究では，ルービックキューブの構造を理解するために置換群に着目した．

本研究の目的は，ルービックキューブの構造を深く理解することである．具体的には，[1] にしたがって，ルービックキューブの手順と配置を数理的に整理し，キューブ理論の第 2 基本定理を [1] で省略された部分を補いながら理解する．この第 2 基本定理は，6 面完成するためのルービックキューブの配置の必要十分条件を示す定理であり，ここから，6 面完成のための配置の個数は全配置の 1/12 であることがわかる．全配置の個数は $2^{29}3^{15}5^{3}7^{2}11$ なので，6 面完成のための配置は $2^{27}3^{14}5^{3}7^{2}11$ である．

本稿では，ルービックキューブの手順と配置を数理的に整理した上で，[1] の第 2 基本定理の証明に対し，本研究で補った部分の一部を示す．

2　ルービックキューブの手順

ここでは，ルービックキューブの手順と配置を表すのに必要な概念を導入する．

ルービックキューブの単位操作の集合は，シングマスター記法を用いて $\{U, D, L, R, F, B\}$ と表される．これらの記号は Up, Down, Left, Right, Front, Back の頭文字で，例えば F はルービックキューブの前面を時計回りに 90 度回転させる操作である．$F * F = F^2$ は前面を 180 度，F^3 は 270 度回転させる操作である．

ルービックキューブの手順 g は，単位操作を用いて $g = RUL$ のように表す．この手順 g は，まず R を行い，次に U を行い，最後に L を行う操作である．このように，単位操作を並べて手順を表すことを，手順を単位操作の語として表すという．

定義 2.1　ルービックキューブの単位操作 U, D, L, R, F, B を生成元とする置換群をルービックキューブ群といい，G で表す．また，ルービックキューブを一旦分解して，また組み立て直す操作を元とした置換群を規則を無視したルービックキューブ群といい，H で表す．

3　ルービックキューブの配置

ここでは，[1] のキューブ理論の第 1 基本定理を用いて，ルービックキューブの配置を数理的に整理する．

初めに，第 1 基本定理を表現するのに必要な概念を導入する．ルービックキューブのキューブは，その色のついた面の数から 3 種類あるが，それを 3 のように，1 面体，2 面体，3 面体と名前をつける．

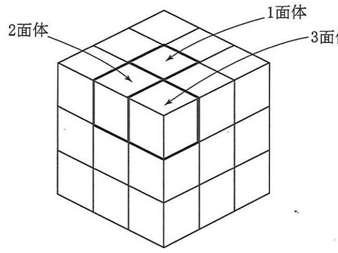
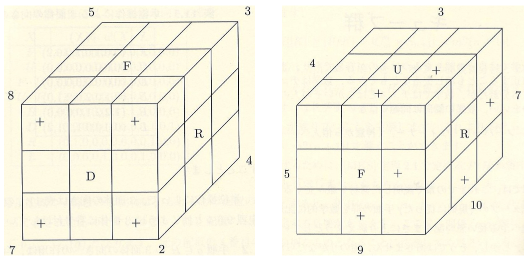


図 1　キューブの名前（出典 [2]）

さらに，3 面体に図 2(a) のように ‘+’ 印をつけ，順に 1 から 8 までの番号を振る．この ‘+’ 印を基準参照印という．また，2 面体にも図 2(b) のように基準参照印をつけ，順に 1 から 12 までの番号を振る．



(a)　(b)

図 2　3 面体と 2 面体の向きと番号付け（出典 [1]）

なお，本稿では，ルービックキューブの頂点と 3 面体，辺と 2 面体を，それぞれ同一視する．

定理 3.1（キューブ理論の第 1 基本定理（[1]）） 次の決定過程によって，ルービックキューブの配置は決定される．

(a) どのように 3 面体が置換されたか．

(b) どのように 2 面体が置換されたか．

(c) 基準参照印に対して 3 面体の印がどれだけ時計回りに 120 度または 240 度回転したか．

(d) 基準参照印に対してどの 2 面体の印が反転したか．

次に，上の定理の決定過程を表す概念を導入する．

定義 3.1　X を任意の有限集合とし，S_X を X からそれ自身への置換全体の集合とする．集合 S_X は置換の合成を演算として群になる．この群 S_X を X の対称群という．通常，集合 X として $\{1, 2, \cdots, n\}$ を用いる．この場合には，その対称群を S_n と表記する．

定義 3.2（3 面体と 2 面体の位置の置換） キューブの頂点の集合を $V = \{1, \cdots, 8\}$，辺の集合を $E = \{1, \cdots, 12\}$ とし，

$$\rho : H \to S_8$$

$$\sigma : H \to S_{12}$$

とする．

ρ は，H の元に対する手順を頂点の置換に対応させる写像，σ は，辺の置換に対応させる写像と解釈できる．

定義 3.3 $n > 1$ とし，C_n（$= \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$）上の演算を単に n を法とする加法とすると C_n は群をなす．この群を n 次巡回群という．

定義 3.4（3 面体と 2 面体の向き）
$v : H \to C_3^8$ と $w : H \to C_2^{12}$ を，任意の $g \in H$ に対して次を満たす写像とする．

$$v(g) = (v_1(g), \cdots, v_8(g))$$

$$w(g) = (w_1(g), \cdots, w_{12}(g))$$

ただし，$v_i(g)$ は，頂点 i にある 3 面体が手順 g によって頂点 j に動かされたとき，3 面体 i の '+' 印のついた小面を j の '+' 印のついた小面にあわせるために，時計回りに捻る角度が 120 度の何倍かによって表す．なお，$v(g)$ のことを $\vec{v}(g)$ とも表記することにする．w についても同様である．

補助定理 3.1（[1]） $g, h \in H$ に対して次の式が成り立つ．

$$\vec{w}(gh) = \vec{w}(g) + \sigma(g)^{-1}(\vec{w}(h))$$

4 キューブ理論の第 2 基本定理

ここでは，キューブ理論の第 2 基本定理の証明のうち，[1] で省略されている部分の一部を述べる．

定理 4.1（キューブ理論の第 2 基本定理（[1]））
次の 3 条件を満たすとき，そしてそのときに限り，ルービックキューブは，四つ組 $(\vec{v}, r, \vec{w}, s)(r \in S_8, s \in S_{12}, \vec{v} \in C_3^8, \vec{w} \in C_2^{12})$ に対応する配置となることができる．

(a) $\mathrm{sgn}(r) = \mathrm{sgn}(s)$（「置換の奇遇性の一致」）

(b) $v_1 + \cdots + v_8 \equiv 0 \pmod{3}$（「総捻り量の保存」）

(c) $w_1 + \cdots + w_{12} \equiv 0 \pmod{2}$（「総反転量の保存」）

ただし，$\mathrm{sgn}(f)$ は置換 f の符号である．

証明
$(\vec{v}, r, \vec{w}, s) \in S_V \times S_E \times C_3^8 \times C_2^{12}$ を，規則に従った手順で得られたルービックキューブの配置を表すものとし，$g \in G$ を，ルービックキューブのすべての面が揃った配置からこの四つ組に対応する配置にする手順として，これから (a)，(b) および (c) を証明する．

本稿では，[1] で省略されている (c) の証明のみを示す．また，逆の証明は行わない．

g が単位操作のとき，[1] で示されている表 11.2 より (c) が成り立つ．そして，次が成り立つ．理由は "–" の後に示す．

(i) $\vec{w} = (w_1, \cdots, w_{12})$ が (c) の総反転量の保存条件を満たすのは，その成分の置換の一つ $P(p)(\vec{w}) = (w_{(1)p}, \cdots, w_{(12)p})$ がその条件を満たすとき，そしてそのときに限る．

- $P(p)(\vec{w})$ の成分は $\vec{w}$ の成分を並べ替えただけなので，$w_1 + \cdots + w_{12} = w_{(1)p} + \cdots + w_{(12)p}$ である．

(ii) $(w_1, \cdots, w_{12})$ および $(w'_1, \cdots, w'_{12})$ がそれぞれ (c) の総反転量の保存条件を満たすとき，この二つの和もこの条件を満たす．

- $(w_1, \cdots, w_{12}) + (w'_1, \cdots, w'_{12}) = (w_1 + w'_1, \cdots, w_{12} + w'_{12})$ であり，$((w_1 + w'_1) + \cdots + (w_{12} + w'_{12})) = (w_1 + \cdots + w_{12}) + (w'_1 + \cdots + w'_{12})$ である．

g を単位操作の語 $g = X_1 \cdots X_k$ として表す．ここで，それぞれの X_i は単位操作 R, L, U, D, F, B のいずれかである．ただし，この式は，k ができるだけ小さくなるように X_i を選んだという意味で最短の式になっていると仮定する．

さて，長さに関する帰納法で (c) を証明する．すでに長さ $k = 1$ の語，つまり単位操作については，(c) が成り立つことが確認できている．$k > 1$ として，二つの手順の積の向きは，補助定理 3.1 より次のように表せる．

$$\vec{w}((X_1 \cdots X_{k-1})X_k)$$

$$= \sigma(X_1 \cdots X_{k-1})^{-1}(\vec{w}(X_k)) + \vec{w}(X_1 \cdots X_{k-1})$$

X_k は単位操作であるから，$\vec{w}(X_k)$ は (c) の総反転量の保存法則を満たす．よって，項 $\sigma(X_1 \cdots X_{k-1})^{-1}(\vec{w}(X_k))$ は，(iii) より (c) の総反転量の保存条件を満たす．項 $\vec{w}(X_1 \cdots X_{k-1})$ は帰納法の仮定により，(c) の総反転量の保存条件を満たす．よって，(iv) より，これらの和は，(c) の総反転量の保存条件を満たす．これで (c) が証明できた．

5 おわりに

本研究では，ルービックキューブを置換群を利用して構造を理解し，ルービックキューブ群の元の個数を求めた．その結果，ルービックキューブ群の元の個数を求めるために，多くの定理が用いられていることがわかった．今回の研究では，定理および補助定理の証明を省略した部分がある．今後，今回省略した証明を証明し，6 面完成法の構造を研究してみたい．

参考文献

[1] David Joyner（川辺治之 訳）:『群論の味わい〜置換群で解き明かすルービックキューブと 15 パズル〜』. 共立出版，東京，2010.

[2] 島内剛一 :『ルービック・キューブと数学パズル』. 日本評論社，東京，2008.