

最大推力を考慮した円軌道上のフォーメーション

2009SE023 藤原基志 2009SE260 杉山慎太郎

指導教員：市川 朗

1 はじめに

複数の人工衛星が編隊飛行する技術をフォーメーションフライトという。この技術は、高精度かつ立体的な観測を行うことができるが、総燃料の増加や軌道制御の複雑化といった問題がある。また、それぞれの人工衛星には出力できる推力の限界があるため、最大推力を考慮する必要がある。そのような問題の解決のために、本研究では燃費や整定時間、最大推力に条件を与え、その条件を満たすようなシステムの設計を行う。制御対象を収束させる目標の軌道を目標軌道と呼ぶ。ここでは、周期解を持ち制御対象に入力を与えずとも軌道上を周り続けることが可能な軌道を目標軌道として Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) 方程式から導出する。この軌道上であれば、宇宙の観測や通信など人工衛星本来の目的を、消費燃料を気にすることなく遂行できる。HCW 方程式は主衛星とその近傍の従衛星を原点で線形化した方程式である。

更に目標軌道に制御対象を収束させるために、状態フィードバックを設計しなければならない。その状態フィードバックの設計方法として、入力が過大とならないようにシステムを安定化させる最適レギュレータのリッカチ方程式を用いる。

以上の手法を用いて、制御対象を条件を満たしつつ初期軌道から目標軌道へ収束させるシミュレーションを行う。

2 相対運動の方程式

主衛星の軌道を半径 R_0 の円軌道とし、その近傍の従衛星の相対運動を考えるために、主衛星の重心を原点とする。図 1 の回転座標系 $o - \{i, j, k\}$ を考える。

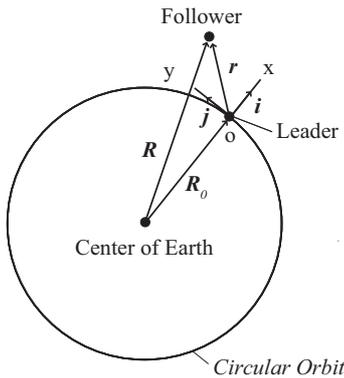


図 1 円軌道上の主衛星

このとき n は角速度、 $\mu = GM$ とし、相対位置ベクトルを $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ とすると、

運動方程式より、

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2(R_0 + x) - \frac{\mu}{R^3}(R_0 + x) + u_x \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2y - \frac{\mu}{R^3}y + u_y \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3}z + u_z\end{aligned}\quad (1)$$

が得られる [1, 2]. ここで $[u_x \ u_y \ u_z]^T = \mathbf{u}$ は単位質量あたりの従衛星に働く推力、 $R = [(R_0 + x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ である。この方程式を原点 $x = y = z = 0$ で線形化すると

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x &= u_x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= u_y \\ \ddot{z} + n^2z &= u_z\end{aligned}\quad (2)$$

が得られる。この方程式が HCW 方程式とよばれる。推力を $\mathbf{u} = 0$ 、初期値を $[x_0 \ y_0 \ \dot{x}_0 \ \dot{y}_0]^T$ とする面内運動の解は

$$\begin{aligned}x(t) &= 4x_0 + 2\dot{y}_0/n - (3x_0 + 2\dot{y}_0/n) \cos nt + (\dot{x}_0/n) \sin nt \\ y(t) &= y_0 - 2\dot{x}_0/n + (2\dot{x}_0/n) \cos nt + (6x_0 + 4\dot{y}_0/n) \sin nt \\ &\quad - (6nx_0 + 3\dot{y}_0)t \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}_0 \cos nt + (3nx_0 + 2\dot{y}_0) \sin nt \\ \dot{y}(t) &= (6nx_0 + 4\dot{y}_0) \cos nt - 2\dot{x}_0 \sin nt - (6nx_0 + 3\dot{y}_0)\end{aligned}\quad (3)$$

で与えられる。初期値を $[z_0 \ \dot{z}_0]^T$ とする面外運動の解は

$$z(t) = z_0 \cos nt + (\dot{z}_0/n) \sin nt \quad (4)$$

$$\dot{z}(t) = -nz_0 \sin nt + \dot{z}_0 \cos nt \quad (5)$$

であり、周期解となる。上の解をパラメータ表現すると

$$\begin{aligned}x(t) &= 2c + a \cos(nt + \alpha) \\ y(t) &= d - 3nct - 2a \sin(nt + \alpha) \\ z(t) &= b \cos(nt + \beta)\end{aligned}\quad (6)$$

ここで

$$\begin{aligned}a &= [(3x_0 + 2\dot{y}_0/n)^2 + (\dot{x}_0/n)^2]^{1/2} \\ c &= 2x_0 + \dot{y}_0/n \\ d &= y_0 - 2\dot{x}_0/n, \quad \sin \alpha = -\dot{x}_0/na \\ \cos \alpha &= -(3x_0 + 2\dot{y}_0/n)/a, \quad b = [z_0^2 + (\dot{z}_0/n)^2]^{1/2} \\ \cos \beta &= z_0/b, \quad \sin \beta = -\dot{z}_0/nb\end{aligned}\quad (7)$$

面内運動は $c = 2x_0 + \dot{y}_0/n = 0$ のとき周期解となり、この条件を CW 条件という。

状態方程式は

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8)$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする. このシステムを安定化させる最適レギュレータのリッカチ方程式は,

$$A^T X + X A + Q - X B R^{-1} B^T X = 0 \quad (9)$$

によってフィードバック

$$u = -R^{-1} B^T X x \quad (10)$$

を求められる.

3 状態フィードバックの評価

初期軌道を $[60.0 \ 0 \ 0 \ -1.3547 \times 10^{-1} \ 30.0 \ 0]$, 目標軌道を $[6.0 \ 0 \ 0 \ -1.3547 \times 10^{-2} \ 1.0 \ 0]$ と設定する.

従衛星の単位質量あたりの推力 $[u_x \ u_y \ u_z]^T = u[km/sec^2]$ の絶対値の最大値を最大推力 $u_{max}[km/sec^2]$ とし, 推力の上限を $u_{lim}[km/sec^2]$, 面内運動の燃費 L_1 - ノルムを $L1[km/sec]$ と表現し, その上限を $L1_{lim}[km/sec]$ として, $u_{lim} = 2.0 \times 10^{-5}$, $L1_{lim} = 5.0 \times 10^{-2}$ とする. 従衛星が目標軌道に収束するまでの時間を整定時間とし, st と表現する. u_{max} と $L1$ に上限を与え, 目標軌道に収束するまでの st は 15 周期である $8.3480 \times 10^4[sec] = 23.189[h]$ 以内を目標とする.

ここで最適レギュレータのリッカチ方程式 (9) により, 設計したフィードバック (10) の重み行列を, $R=10^r * I, Q=10^{-7} * I$ と設計する. r の値を変化させながら, それに伴う st と $L1$ と u_{max} を計算し, 重み行列 R のパラメータを変化させ, st と $L1$ と u_{max} を指定した値以内にする.

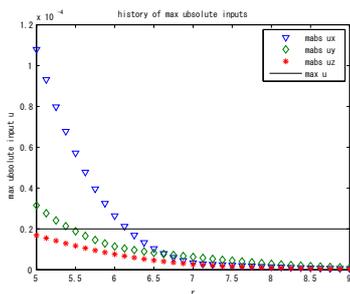


図 2 r の変化に伴う, u_{max} の推移

図 2 より, $r = 6.250$ 以上であれば, u_{lim} を超えない. $r = 6.250, q = -7.0$ ときの u_{max} はそれぞれ以下ようになる.

$$\begin{aligned} u_x &= 1.6889 \times 10^{-2}[m/sec^2] \\ u_y &= 9.6336 \times 10^{-3}[m/sec^2] \\ u_z &= 5.9420 \times 10^{-3}[m/sec^2] \end{aligned}$$

であり,

$$st = 5.4375 \times 10^4[sec] = 15.104[h]$$

$$L1 = 46.636[m/sec]$$

となり, 10 周期の整定時間である $55653[sec]$ に近い値となることから, 約 10 周期で収束していることがわかる.

また r の増加に伴い, $u_x \max, u_y \max, u_z \max$ は単調減少している.

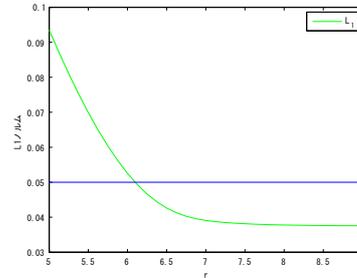


図 3 r の変化に伴う, $L1$ の推移

図 3 より, r が 6.1250 以上であれば, $L1_{lim}$ を下回る. r の増加に伴い, $L1$ が単調減少していることがわかる. また, 同様に L_2 - ノルム $[m/sec]$ も単調減少し 0 に収束することが知られている [3, 4]. $r = 6.150, q = -7.0$ ときの u_{max} はそれぞれ以下ようになる.

$$\begin{aligned} u_x &= 2.1234 \times 10^{-2}[m/sec^2] \\ u_y &= 1.0410 \times 10^{-2}[m/sec^2] \\ u_z &= 6.7012 \times 10^{-3}[m/sec^2] \end{aligned}$$

であり,

$$st = 5.1419 \times 10^4[sec] = 14.283[h]$$

$$L1 = 49.352[m/sec]$$

となる.

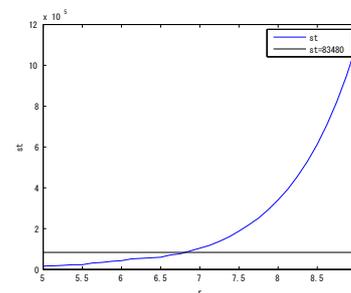


図 4 r の変化に伴う, st の推移

図 4 より, r が 6.750 以下であれば, 人工衛星は 15 周期である $8.3480 \times 10^4[sec]$ 以内に収束する. また, r の増加に伴い st は単調増加している.

$r = 6.750, q = -7.0$ のときの u_{max} はそれぞれ

$$u_x = 6.0175 * 10^{-3} [m/sec^2]$$

$$u_y = 7.2191 * 10^{-3} [m/sec^2]$$

$$u_z = 3.5584 * 10^{-3} [m/sec^2]$$

であり,

$$st = 7.6454 * 10^4 [sec] = 21.237 [h]$$

$$L1 = 40.288 [m/sec]$$

となる.

r の値を 5.0 から 0.1250 刻みで 9.0 まで増加させると, 増加に伴い $L1$ は小さくなり, st は大きくなった. 図 2, 図 3, 図 4 から r の値が, $6.250 \leq r \leq 6.750$ の範囲内であれば, $u_{max}, L1, st$ を全て与えた条件下で実現できる.

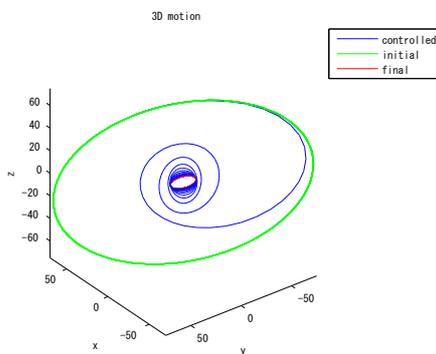


図 5 制御軌道 ($r=6.750$)

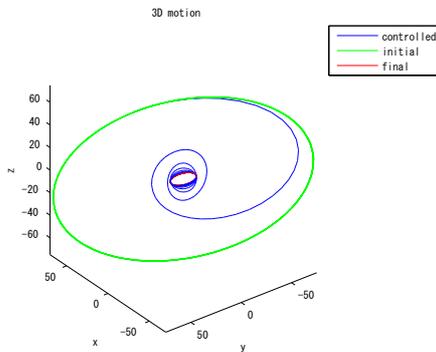


図 6 制御軌道 ($r=6.250$)

図 5 は $r=6.750$ のとき, 図 6 は $r=6.250$ のときのシミュレーションである. 図 6 より, $r=6.250$ のとき約 10 周期で目標軌道に収束する. また, $r = 6.250$ と $r = 6.750$ の整定時間を比較すると $r = 6.250$ の時の方が $r = 6.750$ の時より, およそ 5 周期分短く収束していることがわかる.

$L1$ と st, u_{max} に制限を与えた上で制御対象をフィードバック制御で目標軌道に乗せる事ができた. 以上で, 収束までの整定時間は 15 周期以内となり, $u_{lim}, L1_{lim}$ を, それぞれ下回るようなフィードバック制御を設計できた. 従

衛星が目標軌道に収束できた事も, 図 6 から見てとれる. このようにして, 図 2, 図 3, 図 4 を見比べ, r の範囲を導出することができ, 定めた条件下でフィードバック制御を設計することが可能となる.

また, 本節では, 初期軌道から目標軌道に直接向かう制御について議論してきた. しかし, 直接的に目標軌道に向かうのではなく, 更に初期軌道と目標軌道との間の軌道の中継し段階的に目標軌道を目指した場合, 最大推力が抑えられるのではないかと考えたため, 次節にてそのシミュレーションを行う.

4 中継軌道の設定

今節では, 初期軌道と目標軌道の間の中継軌道を設ける. 初期軌道 $[60.0 \ 0 \ 0 \ -0.13547 \ 30.0 \ 0]$, 中継軌道 $[30.0 \ 0 \ 0 \ -0.067736 \ 1.0 \ 0]$, 目標軌道 $[6.0 \ 0 \ 0 \ -0.013547 \ 1.0 \ 0]$ と設定した.

前節で st や $L1, u_{max}$ をある程度, 与えられた範囲内で設計できた. しかし, st や $L1, u_{max}$ に与える条件によっては, 設計できない場合がある. 例えば, 前節の図 6 の制御設計にて st をそのままにして, u_{max} を小さくする設計はできない. よって, 本節では初期軌道から目標軌道に人工衛星を収束させるまでの間に中継軌道を設定し, それを経由させることで推力を低くする制御を行う. 制御設計は $r = 6.25, q = -7.0$ とし, 前節の図 6 の制御設計と比較して評価する.

フィードバック制御の入力は $\mathbf{u} = -Ke$ となる. 制御軌道と目標軌道の誤差である e が大きいほど, 推力 \mathbf{u} が大きくなる事がわかる. 即ち誤差 e を小さくすれば, 重み行列を変化させなくても推力 \mathbf{u} が小さくできる.

上記の方法を利用して, 推力を下げる制御を行う.

初期軌道から制御を開始して, 中継軌道に収束するまでのシミュレーション結果を図 7 に表す. 制御軌道と中継軌道の誤差が $1000m$ を下回ったとき制御対象が収束したとみなす.

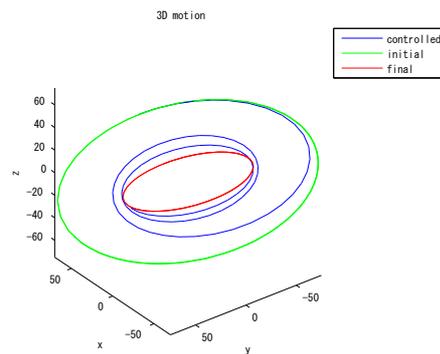


図 7 制御軌道 ($r=6.250, q=-7.0$)

このときの u_{max} はそれぞれ,

$$\begin{aligned} u_x &= 9.3828 * 10^{-3} [m/sec^2] \\ u_y &= 5.3326 * 10^{-3} [m/sec^2] \\ u_z &= 5.9473 * 10^{-3} [m/sec^2] \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} st &= 15202 [sec] = 4.2227 [h] \\ L1 &= 25.903 [m/sec] \end{aligned}$$

となり, 上記の設計であれば u_{lim} を下回る.

中継軌道に収束したとみなす制御軌道は, 制御軌道 [-3.2828 59.521 0.033502 0.0074109 -0.90602 0.0078705] となり, この制御軌道が目標軌道に収束するまでを制御する. そのシミュレーション結果を図8に示す. 目標軌道に収束したとみなす条件は, 制御軌道と目標軌道の距離の誤差が $10m$ を下回った時とする.

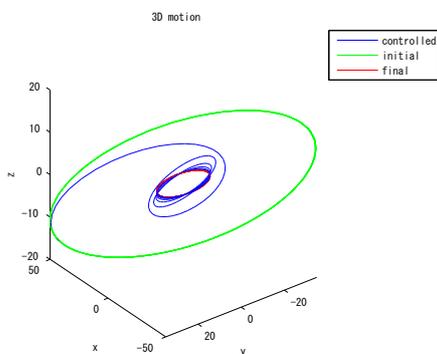


図8 制御軌道 ($r=6.250, q=-7.0$)

この時の u_{max} は,

$$\begin{aligned} u_x &= 5.6698 * 10^{-3} [m/sec^2] \\ u_y &= 1.0263 * 10^{-3} [m/sec^2] \\ u_z &= 1.6319 * 10^{-3} [m/sec^2] \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} st &= 38984 [sec] = 10.828 [h] \\ L1 &= 26.920 [m/sec] \end{aligned}$$

となり, 上記の設計であれば, u_{lim} を下回る.

a から a_1 へ収束する制御, a_1 から a_f に収束する制御, いずれの最大推力も u_{lim} を下回った. そして $L1$ と st の総和は,

$$\begin{aligned} st &= 54186 [sec] = 15.051 [h] \\ L1 &= 52.823 [m/sec] \end{aligned}$$

となった.

前節で $r = 6.250, q = -7.0$ で制御設計を行った場合と

比較して, 本節で行った段階を踏んで目標軌道に到達させる制御は u_{max} を小さくでき, st はほとんど変わらなかった. $L1$ は図6の制御設計と比較して大きくなった.

初期軌道から中継軌道を経て目標軌道に到達したときに図6の制御設計と st が変わらないことや, $L1$ が大きくなること理由は, 制御対象が複数の軌道を経由しているからである. よって $L1$ は大きくなるが, 中継軌道への収束条件を緩く設定しているため, st は短くなる. 例えば, 図7の制御軌道が中継軌道に収束したとみなす条件を, 誤差が $10m$ 以下になったときとする. この場合の st は $st = 48613 [sec], L1 = 25.903 [m/sec]$ となり, 収束条件を厳しくすると整定時間は長くなる. 中継軌道は収束条件を厳密に設ける必要がないので条件を緩くできる.

以上の方法より, 段階的に目標軌道へ収束すれば, u_{max} を抑えつつ, 直接目標軌道に収束させた場合とほぼ整定時間を同じにできる設計が可能となった. st を長くすることなく, 最大推力を抑えたい場合にはこの設計を用いるとよい.

5 おわりに

フォーメーションフライトは, 複数の人工衛星をフライトさせるので燃料消費量が増大する. そのためにも人工衛星の推力や収束するまでの時間を設計することで消費燃料を軽減させなければならない.

その問題に対して, 最適レギュレータのリッカチ方程式よりフィードバック制御を設計し, そこで重み行列を変化させることによって, 設計者が望む推力や整定時間を制御対象に与えることができた. それも今回は r と st のグラフ, r と u のグラフを用いたので, 与えた条件を守るような制御を図からわかりやすく明示した.

また, 複数の軌道を経由させることによって, 推力を抑える設計も可能とし, 制約の多い制御設計の幅を広げることができた.

以上の方法をもってすれば, 制御対象の推力, ノルム, 整定時間のある程度は設計者の意に沿った設計が可能となる.

参考文献

- [1] A. Ichikawa: Recent Developments in Formation Flying, Lecture Notes ver.1, 2010.
- [2] M. Shibata and A. Ichikawa: Orbital Rendezvous and Flyaround Based on Null controllability with Vanishing Energy, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 30, No. 4, pp. 934-945, 2007.
- [3] Y. Ichimura and A. Ichikawa: Optimal Impulsive Relative Orbit Transfer Along a Circular Orbit, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 31, No. 4, pp. 1014-1027, 2008.
- [4] A. Ichikawa: Null Controllability with Vanishing Energy for Discrete-Time Systems, Systems & Control Letters, Vol. 57, No. 1, pp. 34-38, 2008.