ペアノ算術と不完全性定理

2009SE082 石井大介
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

田中 [1] を読むことで不完全性定理というものに興味をもった．そして，本研究では，[1] にしたがって不完全性定理の理解をふかめていく．

不完全性定理の理解は，[1] の第 I 部「第一不完全性定理と第二不完全性定理」の第１章〜第４章を用いた．そして，そこで紹介されている定理の証明において，省略されている部分を成田 [2] を参考にしながら補った．とくに，第２章「ペアノ算術」と第３章「第一不完全性定理」の証明を補った．その中で，定理 2.1（[1] では定理 2.3）と定理 3.6（[1] では定理 3.10）に力をいれた．具体的に，定理 2.1 では不等号に関する公理や後者関数の定義などとの関係をうまく使いながら証明した．定理 3.6 では，１変数述語 $\mathbf{Axiom}_T$ と２変数述語 $\mathbf{Prov}_T$ の定義とゲーデル文を理解した上で証明を行った．

本稿では，上に挙げた定理 2.1 と定理 3.6 を以下の２つの節でそれぞれ扱う．次の２節では，定理 2.1 に関連してペアノ算術の導入も行う．

2 ペアノ算術

この節では，不完全性定理の議論のベースに用いられることの多い，算術の理論の形式体系の１つである，ペアノ算術 (Peano arithmetic ; PA) を，[1] にしたがって導入する．そして，その中の１つの定理（定理 2.1）に対し，[1] の証明の省略部分を補った結果を示す．

この理論 PA の対象は算術の理論の「証明」である．その「証明」は論理の列として定められる．以下に論理式と「証明」を導入する．

論理式の構成に使う要素は数学のどんな分野を考えているかで異なってくる．ここでは，自然数の算術を考えるので，つぎのものを用意する．

・自然数を表す変数
・不等号：$<$
・関数記号：S,+,･
・等号：＝
・定数：0
・論理記号：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$

以上の記号を組み合わせてできる記号列で，自然数を表すものを**項**という．論理式は，これらのようないくつかの要素を，適切に組み合わせてできる文字列のことである．

定数が 0 しかないので，自然数 0,1,2,... を項で表現したいときには，0,$S(0)$,$S(S(0))$,... を用いる．これらの項のことを**数項**と呼び，$\bar{0}$,$\bar{1}$,$\bar{2}$,... と表記する．

「証明」とは，真であることが自明に認められる論理式から始まって，適切なプロセスによって続いていく論理式の列である．この真であることが認められる論理式を公理と呼ぶ．PA では，以下の論理式も公理と約束している．

不等号に関する公理（不等号の再帰的な定義）

$$\forall x \neg (x < 0)$$
$$\forall x \forall y ((x < S(y)) \leftrightarrow ((x < y) \vee (x = y))$$

帰納法の公理

$$\forall \vec{y} ((\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x (\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(S(x), \vec{y}))) \rightarrow \forall x \varphi(x, \vec{y}))$$

この節で扱う定理は以下である．

定理 2.1（[1] の定理 3.3） つぎが成り立つ．

(a) 任意の自然数 n に対して，
PA$\vdash (\forall x < \overline{n+1})(x = 0 \vee x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = \bar{n})$.

(b) 任意の自然数 n に対して，
PA$\vdash \forall x (x = 0 \vee x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = \bar{n} \vee \bar{n} < x)$.

証明 (a) を示す．書き換えるとつぎのようになる．

任意の自然数 n に対して，
PA $\vdash \forall x ((x < \overline{n+1}) \rightarrow (x = 0 \vee x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = \bar{n}))$
これを n に関する帰納法で示す．

(i)$n = 0$ のとき
PA $\vdash \forall x ((x < \overline{0+1}) \rightarrow (x = 0 \vee \cdots \vee x = \bar{0}))$
つまり

$$\text{PA} \vdash \forall x ((x < \bar{1}) \rightarrow (x = 0))$$

を示せばよい．

不等号に関する公理の２つ目より

$$\text{PA} \vdash (x < S(0)) \leftrightarrow ((x < 0) \vee (x = 0))$$

不等号に関する公理の１つ目と $\bar{1}$ の定義である $S(0) \equiv \bar{1}$ を用いて

$$\text{PA} \vdash (x < \bar{1}) \rightarrow (x = 0)$$

(ii)「PA$\vdash \forall x ((x < \overline{k+1}) \rightarrow (x = 0 \vee x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = \bar{k}))$」が成り立つと仮定して「PA$\vdash \forall x ((x < S(\overline{k+1})) \rightarrow (x = 0 \vee x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = S(\bar{k})))$」を示す．

帰納法の仮定より

$$\text{PA} \vdash (x < \overline{k+1}) \rightarrow (x = 0 \vee \cdots \vee x = \bar{k}) \quad (1)$$

ここで，数項の定義より

$$\text{PA} \vdash (x = \overline{k+1}) \rightarrow (x = S(\bar{k})) \quad (2)$$

(1),(2) より
PA $\vdash (x < \overline{k+1} \vee x = \overline{k+1}) \rightarrow (x = 0 \vee \cdots \vee x = \bar{k} \vee x = S(\bar{k}))$
よって，不等号に関する公理の１つ目より
PA $\vdash (x < S(\overline{k+1})) \rightarrow (x = 0 \vee \cdots \vee x = S(\bar{k}))$
つまり
PA $\vdash \forall x ((x < S(\overline{k+1})) \rightarrow (x = 0 \vee \cdots \vee x = S(\bar{k})))$

以上 (i),(ii) より (a) は示された．

(b) を n に関する帰納法で示す．

(i)$n = 0$ のとき

$\mathrm{PA} \vdash \forall x(x = \bar{0} \vee \cdots \vee x = \bar{0} \vee \bar{0} < x)$
つまり
$\mathrm{PA} \vdash \forall x(x = 0 \vee 0 < x)$
を示せばよい．$x = 0 \vee 0 < x$ を $P(x)$ とおいて，$\mathrm{PA} \vdash \forall x P(x)$ を示す．
(i-i)PA$\vdash$ $P(0)$ を示す．等号の公理より
$$\mathrm{PA} \vdash 0 = 0$$
よって
$$\mathrm{PA} \vdash (0 = 0) \vee (0 < 0)$$
すなわち
$$\mathrm{PA} \vdash P(0)$$
(i-ii)「PA$\vdash$ $P(y)$」が成り立つと仮定して,「PA$\vdash$ $P(S(y))$」を示す．仮定より
$$\mathrm{PA} \vdash (y = 0) \vee (0 < y)$$
よって，不等号に関する公理の２つ目より
$$\mathrm{PA} \vdash 0 < S(y)$$
つまり
$$\mathrm{PA} \vdash (S(y) = 0) \vee (0 < S(y))$$
すなわち
$$\mathrm{PA} \vdash P(S(y))$$
以上で (i-ii) が示された．
(i-ii) より
$$\mathrm{PA} \vdash P(y) \to P(S(y))$$
つまり
$$\mathrm{PA} \vdash \forall y(P(y) \to P(S(y))) \tag{3}$$
したがって，(i-i)，(3)，帰納法の公理より，PA$\vdash$ $\forall x P(x)$ は示せた．
(ii)「PA$\vdash$ $\forall x(x = 0 \vee \cdots \vee x = \bar{k} \vee \bar{k} < x)$」が成り立つと仮定して「PA$\vdash$ $\forall x(x = 0 \vee \cdots \vee x = S(\bar{k}) \vee S(\bar{k}) < x)$」を示す．

不等号に関する公理と帰納法の公理よりつぎを証明できる．
$$\mathrm{PA} \vdash \bar{k} < x \leftrightarrow (S(\bar{k}) = x \vee S(\bar{k}) < x) \tag{4}$$
仮定と (4) より
$$\mathrm{PA} \vdash (x = 0) \vee \cdots \vee (S(\bar{k}) < x)$$
つまり
$$\mathrm{PA} \vdash \forall x(x = 0 \vee \cdots \vee x = S(\bar{k}) \vee S(\bar{k}) < x)$$
以上 (i),(ii) より，(b) は示せた．

3　第一不完全性定理

この節では，第一不完全性定理を証明するための１つの定理（定理 3.6）に対し，[1] の省略部分を補った結果を示す．まず，そのためのいくつかの概念を導入し，その性質を述べる．

定義 3.1　以下の２条件 (a),(b) が成り立つとき，理論 T は PA の計算可能拡大であるという．また，以下の条件 (a) が成り立つとき，理論 T は PA の拡大であるという．

(a) T の公理の中には PA のすべての公理が含まれる．
(b) 述語 $\mathbf{Axiom}_T$ は計算可能である．

定義 3.2　理論 T に対して，自然数上の２変数述語 $\mathbf{Prov}_T$ をつぎで定義する．

$\mathbf{Prov}_T(n,m) \Leftrightarrow m$ は論理式（φ とする）のゲーデル数であって，n は「T における φ の証明」のゲーデル数である．

補題 3.3　述語 $\mathbf{Axiom}_T$ が計算可能ならば $\mathbf{Prov}_T$ も計算可能になる．さらに，$\mathbf{Prov}_T$ が計算可能ならばつぎの条件を満たす Σ_1 論理式 $\mathrm{Prov}_T(y,x)$ の存在がいえる．任意の自然数 n,m について

(1) $\mathbf{Prov}_T(n,m)$ が成り立つときには
$$\mathrm{PA}\vdash \mathrm{Prov}_T(\bar{n},\bar{m})$$
(2) $\mathbf{Prov}_T(n,m)$ が成り立たないときには
$$\mathrm{PA}\vdash \neg\mathrm{Prov}_T(\bar{n},\bar{m})$$

この $\mathrm{Prov}_T(y,x)$ によってつくられた Σ_1 論理式 $\exists y \mathrm{Prov}_T(y,x)$ のことを T の証明可能性述語と呼び，これを $\mathrm{Pr}_T(x)$ と表記する．

定理 3.4（対角化定理）　$\varphi(x)$ が x 以外の自由変数を含まない論理式ならばつぎの条件を満たす文 ψ が存在する．
$$\mathrm{PA} \vdash \psi \to \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$$
ただし，$\ulcorner\psi\urcorner$ は ψ のゲーデル数である．

定義 3.5　$\mathrm{Pr}_T(x)$ が理論 T の証明可能性述語で，文 G が
$$T \vdash G \ \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner})$$
を満たすとき，G は T のゲーデル文であるという．

この節で扱う定理は以下である．

定理 3.6　理論 T が PA の計算可能拡大ならば，T のゲーデル文が存在する．

証明　理論 T が PA の計算可能拡大なので，定義 3.1 よりつぎの２条件が成り立つ．

(a) T の公理の中には PA のすべての公理が含まれる．
(b) 述語 $\mathbf{Axiom}_T(n)$ は計算可能である．

(b) と補題 3.3 より，T の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する．ここで，$\neg Pr_T(x)$ は x 以外の自由変数を含まない論理式であるので定理 3.4 より
$$\mathrm{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$$
を満たす文 ψ が存在する．いま文 ψ を G とおくと
$$\mathrm{PA} \vdash G \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner})$$
(a) より，理論 T が PA の拡大となるので
$$T \vdash G \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner})$$
つまり定義 3.5 より，G は T のゲーデル文である．

4　おわりに

本研究では，ゲーデルの不完全性定理について理解することができた．本研究を進めるにつれて，ゲーデルに関連する歴史的背景に興味をもったので今後，不完全性定理の歴史的経緯についてふれていきたい．

参考文献

[1] 田中一之，ゲーデルと 20 世紀の論理学　不完全性定理と算術の体系，東京大学出版会，東京，2007.
[2] 成田一平，不完全性定理とその展開，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2009 年度卒業論文，2010.