証明における等式の性質とその形式表現

2009SE101 加藤光
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は，等式の性質を用いる証明を，形式体系 SNK を用いて書けるようになることである．具体的には，体系 SNK の証明図（SNK 証明図）における各推論規則に，実際の文を対応させて実証明を表現する．とくに，SNK の等号規則に実際の文をどのように対応させるかを考える．

卒業論文では，等号規則が連続して用いられた 4 つの場合に対してどのように文を対応させるかを考察し，それに基づく実証明を記述した．本稿では，その 4 つの各場合に対して，文を対応させる方法を 2 つ挙げて，その適切性を示す．以下では，2 節でシークエント体系 SNK を導入する．3 節で上の 4 つの場合を一般的に考える．4 節では実例を挙げて考える．

2 シークエント体系 SNK と等号規則

ここでは, シークエント体系 SNK を導入する．

論理式を定義するための対象変数, 対象定数, 関数記号, 述語記号は対象とする理論で用いられるものと同じ記号を用いる．論理式は, これらの記号と論理記号 $\wedge$(かつ),$\vee$(または),$\supset$(ならば),$\neg$(否定),$\forall$(すべて),$\exists$(ある),$\perp$(矛盾) を用いて定義する．推論規則は, 佐々木 [2] のものに，いくつかの規則を追加する．本稿では，そのうちの等号に関するものだけを挙げる．その等号に関する規則は，以下の 4 つと，それらの下式と右の上式の等式の，左辺と右辺を入れ替えた規則である．

$$\frac{\Gamma \to x = s_1 \quad \Gamma \to s(s_1) = t}{\Gamma \to s(x) = t}(\to=)$$

$$\frac{\Gamma \to x = s_1 \quad \{s(s_1) = t\} \cup \Gamma \to P}{\{s(x) = t\} \cup \Gamma \to P}(=\to)$$

$$\frac{\Gamma \to s = s_1 \quad \Gamma \to s_1 = t}{\Gamma \to s = t}(\to=)$$

$$\frac{\Gamma \to s = s_1 \quad \{s_1 = t\} \cup \Gamma \to P}{\{s = s_1\} \cup \Gamma \to P}(=\to)$$

3 等号規則に文を対応させる方法

この節では，等号規則が連続して用いられた 4 つの場合を対象として，文を対応させる方法を 2 つずつ述べる．

(1) 次のように $(=\to)$ が連続して用いられる場合

$$\dfrac{\Gamma \to x = s_1 \quad \dfrac{\Gamma \to s(s_1) = s_2 \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to s_{n-1} = s_n \quad (*_n)\ \Gamma \cup \{s_n = t\} \to \bot}{\vdots}}{(*_2)\ \Gamma \cup \{s_2 = t\} \to \bot}}{(*_1)\ \Gamma \cup \{s(s_1) = t\} \to \bot}}{\Gamma \cup \{s(x) = t\} \to \bot}$$

方法 1([3])：$(*_n)$ に
$\Big[x = s_1$より$, s(x) = s(s_1) = s_2 = \cdots = s_n = t$である$\Big]$
を対応させる．

方法 2：$(*_1)$,$(*_2)$,$\cdots$,$(*_n)$ に次のように文を対応させる．

$(*_1)$：[$x = s_1$ より，$s(s_1) = t$]
$(*_2)$：[よって，$s_2 = t$]
$\cdots$
$(*_n)$：[よって，$s_n = t$]

方法 1 で対応させた文は，$s(x) = t$ を主張していると解釈できるが，これは $(*_n)$ の左辺 $s_n = t$ と異なっている．したがって，この場合は方法 2 が適切と考える．

(2) 次のように $(\to=)$ が連続して用いられる場合

$$\dfrac{\Gamma \to x = s_1 \quad \dfrac{\Gamma \to s(s_1) = s_2 \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to s_{n-1} = s_n \quad \Gamma \to s_n = t(*_n)}{\vdots}}{\Gamma \to s_2 = t(*_2)}}{\Gamma \to s(s_1) = t(*_1)}}{\Gamma \to s(x) = t(*)}$$

方法 1：$(*)$ に
$\Big[x = s_1$より$, s(x) = s(s_1) = s_2 = \cdots = s_n = t$である$\Big]$
を対応させる．

方法 2：$(*)$,$(*_1)$,$(*_2)$,$\cdots$,$(*_n)$ に次のように文を対応させる．

$(*_n)$：[よって，$s_n = t$]
$\cdots$
$(*_2)$：[よって，$s_2 = t$]
$(*_1)$：[$s(s_1) = s_2$ より，$s(s_1) = t$]
$(*)$：[$x = s_1$ より，$s(x) = t$]

(3) 次のように $(=\to)$ が連続して用いられる場合

$$\dfrac{\Gamma \to x = s_1 \quad \dfrac{\Gamma \to s(s_1) = s_2 \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to s_{n-1} = s_n \quad (*_n)\ \Gamma \cup \{t = s_n\} \to \bot}{\vdots}}{(*_2)\ \Gamma \cup \{t = s_2\} \to \bot}}{(*_1)\ \Gamma \cup \{t = s(s_1)\} \to \bot}}{\Gamma \cup \{t = s(x)\} \to \bot}$$

方法 1：$(*_n)$ に
$\left[x = s_1 より, t = s(x) = s(s_1) = s_2 = \cdots = s_n である\right]$
を対応させる
方法 2：$(*_1)$,$(*_2)$,$\cdots$,$(*_n)$ に次のように文を対応させる．

$(*_1)$：[$x = s_1$ より，$t = s(s_1)$]

$(*_2)$：[よって，$t = s_2$]

$\cdots$

$(*_n)$：[よって，$t = s_n$]

(4) 次のように $(\to=)$ が連続して用いられる場合

$$\dfrac{\Gamma \to x = s_1 \qquad \dfrac{\Gamma \to s(s_1) = s_2 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\Gamma \to s_{n-1} = s_n \quad \Gamma \to t = s_n(*_n)}{}\\ \vdots\end{array}}{\Gamma \to t = s_2(*_2)}}{\Gamma \to t = s(s_1)(*_1)}}{\Gamma \to t = s(x)(*)}$$

方法 1：$(*)$ に
$\left[x = s_1 より, t = s_n = s_2 = s(s_1) = \cdots = s(x) である\right]$
を対応させる
方法 2：$(*)$,$(*_1)$,$(*_2)$,$\cdots$,$(*_n)$ に次のように文を対応させる．

$(*_n)$：[よって，$t = s_n$]

$\cdots$

$(*_2)$：[よって，$t = s_2$]

$(*_1)$：[$s(s_1) = s_2$ より，$t = s(s_1)$]

$(*)$：[$x = s_1$ より，$t = s(x)$]

4 実例

この節では，前節の (1),(2) に対して，実際に文を対応させた例を挙げる．証明すべき命題はチャートランド [1] から抽出した．

命題 1　$5x - 7$ が奇数のとき，x は偶数である．

命題 1 の SNK 証明図の上の部分を図 1 に示す．命題 1 は背理法によって,「$x = 2a + 1$ と $5x - 7 = 2b + 1$ から矛盾を導く」ことで示すことができるが，図 1 はこの証明を表している．

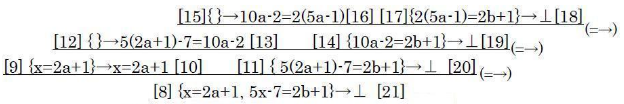

図 1　命題 1 の証明図の一部

図 1 は，前節の (1) の場合に該当し，方法 2 によって文を対応させる．すると次のようになる．

図 1 に対応する文

[11] $5x - 7 = 2b + 1$ と $x = 2a + 1$ より，
$5(2a + 1) - 7 = 2b + 1$ である．

[14] よって，$10a - 2 = 2b + 1$ である．

[16] よって，$2(5a - 1) = 2b + 1$ である．

[18] これは，偶数と奇数が異なることに矛盾する．

命題 2　m が偶数で n が奇数のとき，$3m + 5n$ は奇数である．

命題 2 の SNK 証明図の上の部分を図 2 に示す．命題 2 は「$m = 2a$ と $n = 2b+1$ から $3m+5n = 2(3a+5b+2)+1$ を導く」ことで示すことができるが，図 2 はこの証明を表している．

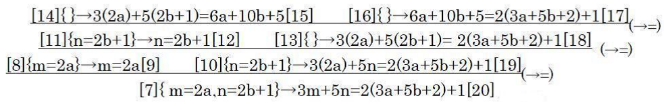

図 2　命題 2 の証明図の一部

図 2 は，前節の (2) の場合に該当し，2 つの方法で文を対応させる．すると次のようになる．

図 2 に対応する文 (方法 1)

[20] $m = 2a$，$n = 2b + 1$ より，
$3m + 5n = 3(2a) + 5n = 3(2a) + 5(2b + 1)$
$= 6a + 10b + 5 = 2(3a + 5b + 2) + 1$
である

図 2 に対応する文 (方法 2)

[17]$6a + 10b + 5 = 2(3a + 5b + 2) + 1$ である

[18] よって，$3(2a) + 5(2b + 1) = 2(3a + 5b + 2) + 1$ である

[19]$n = 2b+1$ より，$3(2a)+5n = 2(3a+5b+2)+1$ である

[20] $m = 2a$ より，$3m + 5n = 2(3a + 5b + 2) + 1$ である

上の方法 2 では，[17] に対応する文が出てくる理由がわかりにくい．よって，方法 1 が適切と考える．

5 おわりに

今回の研究で，SNK 証明図を用いる問題の解きやすさを学ぶことができた．はじめは，実際の証明を作ることに，SNK 証明図がどれくらい重要なのかを理解していなかった．研究を通して等号規則が深く関わっていることと，それを理解することによって証明問題をスムーズに理解できることがわかった．

参考文献

[1] ゲアリー・チャートランド　他 (鈴木　治郎　訳):『証明の楽しみ』, 株式会社ピアソン・エデュケーション, 東京，2004

[2] 佐々木克巳:シークエント体系の証明図から実証明を作る方法,『アカデミア　情報理工学編』第 11 巻，南山大学，2011，pp．35–54

[3] 佐藤友亮, 形式体系と実際の証明, 南山大学数理情報工学部情報システム数理学科 2011 年度卒業論文,2012.