

倒立振子のモデル化と制御

—学習教材としての活用を意識して—

2009SE129 児島圭

指導教員：大石泰章

1 はじめに

本研究では、倒立振子は不安定なシステムであり、制御を用いることにより安定化できることが視覚的に実感できるので、制御の学習に適している。そこで、車輪型倒立振子のモデルを導出し、極配置法、最適レギュレータ理論を用いたコントローラ設計を行う。また、コントローラ設計を行うまでの状態方程式の導出、フィードバックゲインを求める際のポイントを挙げるにより教材としての活用を意識する。

2 モデリング

今回、車輪型倒立振子として使用するヴェイストン社の Beuto Balancer の外観を図 1 に示す [1]。



図 1 Beuto Balancer

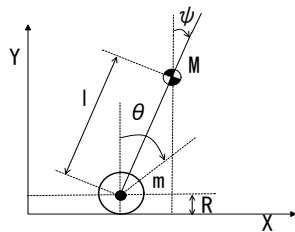


図 2 概略図

図 2 に横から見た倒立振子の概略図を示す。ただし、車輪の回転角度 θ [rad]、車体の傾斜角度 ψ [rad] である。また、倒立振子の物理パラメータは表 1 の通りである。この概略図に基づいて数式モデルを作る。

表 1 倒立振子の物理パラメータ

| 項目 | 表記 | 値 |
|--------------|------------|--|
| 重力加速度 | g | 9.81[m/g ²] |
| 車体の重量 | M | 0.177[kg] |
| タイヤの重量 | m | 0.005[kg] |
| タイヤの半径 | R | 0.021[m] |
| 重心位置 | l | 0.084[m] |
| 車体の慣性モーメント | J_ψ | 14.83×10^{-5} [kgm ²] |
| タイヤの慣性モーメント | J_θ | 1.136×10^{-6} [kgm ²] |
| タイヤと床の摩擦係数 | | 0 |
| タイヤとモータの摩擦係数 | f | 0 |
| モータの抵抗 | r | 0.6[Ω] |
| モータのトルク係数 | K_t | 0.00204[V/s/rad] |
| モータの逆起電力 | K_b | 0.00204[Nm/A] |

並進方向の運動エネルギーを T_1 、回転方向の運動エネルギー T_2 、位置エネルギーを U と置くとラグランジュ関数

L は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 L &= T_1 + T_2 - U \\
 &= \frac{1}{2}M(R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}l\dot{\psi}\cos\psi + l^2\dot{\psi}^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 \\
 &\quad - mgR - Mgl\cos\psi
 \end{aligned} \tag{1}$$

この L に基づいてラグランジュの運動方程式をたて、 $\theta = 0$ 、 $\psi = 0$ を中心として線形化を行い、さらに、モータの関係式をまとめると以下を得る。

$$E \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_t}{r} \\ -\frac{K_t}{r} \end{bmatrix} v \tag{2}$$

ただし、 u はモータへの入力電圧であり、

$$E = \begin{bmatrix} MR^2 + mR^2 + J_\theta & MRl \\ MRl & MI^2 + J_\psi \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{K_t K_b}{r} + f & -\frac{K_t K_b}{r} - f \\ -\frac{K_t K_b}{r} - f & \frac{K_t K_b}{r} + f \end{bmatrix} \tag{4}$$

である。

以上により状態方程式は、 $v = u$ 、 $x = [\theta \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ とすると

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0^{2 \times 2} & I^{2 \times 2} \\ -E^{-1}G & -E^{-1}F \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0^{2 \times 1} \\ E^{-1}H \end{bmatrix} u \tag{6}$$

となる。以上で求めたモデルを安定化するため、状態フィードバックゲイン K を用いる。このときのブロック線図は図 3 となる。

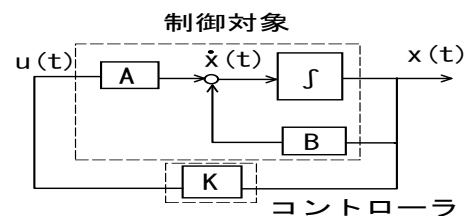


図 3 コントローラ K を用いたブロック線図

3 極配置法

状態フィードバックゲイン K の設計方法として、極配置法を用いたコントローラ設計を行う。極配置法とは

$A + BK$ の固有値を指定した値とすることである。ここで指定する値とは、倒立振子が安定化するような値である。指定した極の実部を負側に大きくすると、フィードバックゲイン K が大きくなるために入力電圧の値も大きくなる。しかし、Beauto Balancer のモータの最大電圧が 3.3[V] なので、この値を超えないようにする必要がある。シミュレーションでは実験機で試して安定化できた場合とできなかった場合を示す。

実験機で安定化できた場合の極

$$\begin{pmatrix} -30 & -20 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

導出したフィードバックゲイン K

$$K = [-0.21 \quad -14.85 \quad -0.115 \quad -0.78] \quad (8)$$

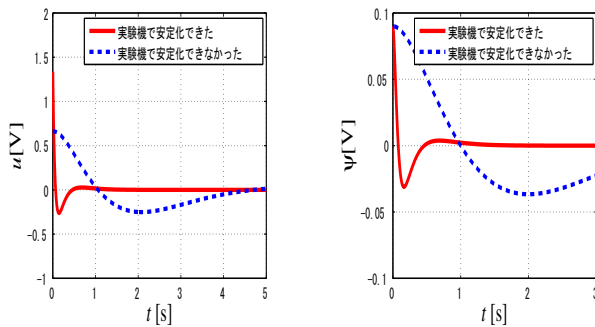
実験機で安定化できなかった場合の極

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

導出したフィードバックゲイン K

$$K = [0.00 \quad -7.34 \quad -0.002 \quad -0.02] \quad (10)$$

時間は $t[s]$ 、状態の初期値は $\theta = 0$ 、 $\psi = \pi/12$ 、 $\dot{\theta} = 0$ 、 $\dot{\psi} = 0$ である。決定した値でのシミュレーション結果を以下に示す。



[(a) 電圧のグラフ] [(b) 車体の角度のグラフ]

図4 極配置法のシミュレーション結果

極配置の問題点としては、極の配置が難しいところである。そこで、次に最適レギュレータによるフィードバックゲイン K の導出を行う。

4 最適レギュレータ

最適レギュレータ理論を用いたコントローラ設計を行う。参考文献 [2] より、制御対象が可制御である状態方程式に対して評価関数 J は式 (8) である。

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (11)$$

この評価関数を最小化する状態フィードバック形式のコントローラを求める問題が、最適レギュレータ問題である。今回は、モータの入力電圧の限界が 3.3[V] といった制約が

あるため、 R の値を大きくすることにより入力電圧を抑える。シミュレーションにおいてそれらの制約条件を満たし、シミュレーション結果が良くなるように重み行列 Q 、 R を決定する必要がある。決定した値は以下ようになる。

実験機で安定化できた場合の重みと導出したゲイン K

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, R = 100 \quad (12)$$

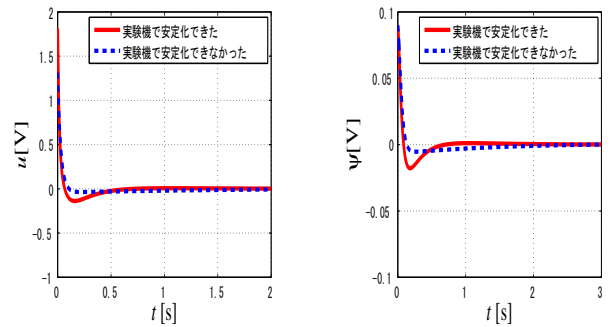
$$K = [-0.17 \quad -20.14 \quad -0.17 \quad -1.17] \quad (13)$$

実験機で安定化できなかった場合の重みと導出したゲイン K

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = 10000 \quad (14)$$

$$K = [-0.01 \quad -14.62 \quad -0.025 \quad -0.49] \quad (15)$$

決定した重みでのシミュレーション結果を以下に示す。時間は $t[s]$ 、状態の初期値は $\theta = 0$ 、 $\psi = \pi/12$ 、 $\dot{\theta} = 0$ 、 $\dot{\psi} = 0$ である。



[(a) 電圧のグラフ] [(b) 車体の角度のグラフ]

図5 最適レギュレータのシミュレーション結果

実験機で安定化できなかった原因としてはゲインが小さく、まだ考えていない摩擦の影響を受けているためと考える。

5 おわりに

今回は、学習教材としての活用を意識して極配置法、最適レギュレータを用いたコントローラ設計を行った。導出したフィードバックゲインを用いて倒立を実現することができたが、より良い安定な状態を実現するために、さらに正確なモデルを考えてみる必要がある。また、学習教材として考えると実験データを取得することが今後の課題である。

参考文献

- [1] Beauto Balancer <http://www.vstone.co.jp/robot/>
- [2] 川田昌克: MATLAB/Simulink による 現代制御入門, 森北出版株式会社