導出計算とその応用

2009se131 小松寛

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は，導出計算という形式手法を用いて，実際に問題を解けるようになることである．具体的には，[1] に従って，導出計算を理解すること，および，実際の具体的な問題を解くことを行った．

卒業論文では，最初に導出計算で必要な概念，すなわち，命題論理の論理式，トートロジー，論理和標準形，述語論理の論理式とその恒真性，存在冠頭論理式，スコーレム標準形について述べた．次に，導出計算の基礎である命題論理の導出計算 R_0 を述べ，述語論理に対する導出計算 R_1，単一化を用いる導出計算 R_2 へと拡張した．最後に，実際に問題に適用し，その問題の解を導いた．

本稿では，R_2 およびそれに必要な概念を導入し，[1] で紹介されている実際の問題を，[1] の解とは双対な形で解く．

2 述語論理と標準形

この節では，述語論理と，いくつかの標準形を，[1] にしたがって導入する．

まず，述語論理を導入する．ここで用いる述語論理の言語は以下である．

1) 論理結合子 $\wedge, \vee, \supset, \neg$

2) 量化記号 $\forall, \exists$

3) 対象変数 $x, y, z, \cdots$

4) 対象定数 $c, d, \cdots$

5) 関数記号 $f, g, \cdots$

6) 述語記号 $P, Q, \cdots$

7) 補助記号 (,),, (コンマ)

原子論理式，リテラル，論理式はこれらからふつうの方法で定義する．その詳細は [1] にしたがう．これらの論理式の恒真性および，同値性の定義も [1] にしたがう．二つの論理式 A と B が同値であることを $A \equiv B$ と表す．

次に，論理和標準形，冠頭論理式，存在冠頭論理式を導入する．

定義 2.5 論理和標準形

$A_{ij}(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n_i)$ をリテラルとするとき，$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} A_{ij}$ の形の論理式を論理和標準形という．

補助定理 2.1

量化記号を含まない任意の論理式 A に対して，A と同値な論理和標準形の論理式が存在する．

定義 2.6 冠頭論理式

$Q_1, \cdots, Q_n$ を $\forall$ または $\exists$，B を量化記号を含まない論理式としたとき，$Q_1x_1 \cdots Q_nx_nB$ の形の論理式を冠頭論理式という．

定義 2.7 存在冠頭論理式

現れる量化記号がすべて $\exists$ である冠頭論理式を存在冠頭論理式という．

補助定理 2.2

任意の論理式 A に対し，ある存在冠頭論理式 A^+ が存在して，A が恒真のとき，またそのときに限り A^+ は恒真になる．

証明 上の A^+ は次のように求める．

まず，A と同値な冠頭論理式 A' を次の同値性などを用いて求める．

$\forall xB \vee C \equiv \forall x(B \vee C)$($C$ に x は自由に現れない)

$\forall x \neg B \equiv \neg \exists xB$

次に，A' が恒真であることと，A^+ が恒真であることとが同値な存在冠頭論理式 A^+ を求める．

A' がすでに存在冠頭論理式になっている場合には A^+ として A' をとる．A' が存在冠頭論理式でないとすると，A' は

(1)$\exists x_1 \cdots \exists x_m \forall yC$

の形をしている．ただし $m \geq 0$ で，C は冠頭論理式とする．このとき，新しく m 変数関数記号 f を導入し，論理式

(2)$\exists x_1 \cdots \exists x_m(C[f(x_1, \cdots, x_m)/y])$

を作る．($m = 0$ の場合には新しく定数記号 C をとり, (2) の $f(x_1, \cdots, x_m)$ の代わりに C をとる).
(2) の論理式が存在冠頭論理式ならば，この論理式を A^+ とする．そうでなければ，(2) に対して (1) に対して行ったものと同じ操作を行う．(1) から (2) を作る操作により全称記号 $\forall$ の数は一つ減るから，この操作を何回か繰り返すことにより存在冠頭論理式が得られる．それを A^+ とする．

3 R_2 の導出図

この節では，R_2 の導出図と，そのために必要な概念を導入する．まず，節，空節，節集合，相補的，導出節，導出原理を次のように定める．

節 リテラルの有限集合を節という．

空節 空の節を空節といい，□と表す．

節集合 節の有限集合を節集合という．

相補的 原子論理式 A に対して，A を ($\neg A$ を)，$\neg A$ の (A の) 相補的なリテラルといい，$(\neg A)^*$ と (A^* と) 表す．

導出節 二つの節 C_1 と C_2 があり，C_1 にリテラル A が属し，C_2 に相補的な A^* が属しているとする．このときの節 (C_1-A) $\cup$ (C_2-A^*) を導出節という．

導出原理 二つの節からその導出節を作り出す操作のことを導出原理という．

次に，単一化代入を導入する．$\{E_1, \cdots, E_n\}$ を表現の集合とする．代入 θ が $\{E_1, \cdots, E_n\}$ の単一化代入 (unifier) であるとは，$E_1\theta = E_2\theta = \cdots = E_n\theta$ が成り立つこととする．また，集合 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ に対し単一化代入が存在するときには，この集合は単一化可能であるという．そしてさらに，$\{E_1, \cdots, E_n\}$ が単一化可能のとき，μ が $\{E_1, \cdots, E_n\}$ の単一化代入であり，さらに $\{E_1, \cdots, E_n\}$ のどんな単一化代入 θ をとってもある代入 σ をとると $\theta = \mu \circ \sigma$ の形に表せるのであれば，μ を最も一般的な単一化代入 (mgu) という．ただし，$\theta = \mu \circ \sigma$ は，二つの代入 μ と σ を順に適用した結果を表すとする．

さて，導出計算 R_2 における，節集合 S から節 C に到る導出図は次のように定義される．

定義 3.1

節集合 S から節 C に到る R_2 の導出図を次のように定義する．

1) 節 C が S に属す場合，C だけからなる図は S から C に到る導出図である．

2) S から節 C_1 および C_2 に到る導出図 $\mathcal{D}_1$ および $\mathcal{D}_2$ が与えられているとする．また μ_1 と μ_2 はともに変数を変数でおきかえる代入で，$C_1\mu_1$ と $C_2\mu_2$ に共通な変数は現れないものとする．ここで $C_1\mu_1$ に属するリテラルのうち $A_1, \cdots, A_m (m \geq 1)$ と $C_2\mu_2$ に属するリテラルのうち $B_1, \cdots, B_n (n \geq 1)$ に対し集合 $\{A_1, \cdots, A_m, B_1^*, \cdots, B_n^*\}$ が単一化可能であり，その mgu が θ であるとする．さらに節 C を $C = ((C_1\mu_1 - \{A_1, \cdots, A_m\}) \cup (C_2\mu_2 - \{B_1, \cdots, B_n\}))\theta$ により定める．このとき次のようにして得られる図は S から C に到る導出図である．

$$\begin{array}{cc} \mathcal{D}1 & \mathcal{D}2 \\ C1 & C2 \\ \diagdown & \diagup \\ \multicolumn{2}{c}{C} \end{array}$$

定理 3.2（述語論理の導出計算 R_2 の完全性）

S を空でない任意の節集合とする．また，$x_1, \cdots, x_n$ を S に現れる変数全体の集合とする．このとき，論理式 $\exists x_1 \cdots \exists x_n d(S)$ が恒真になるための必要十分条件は R_2 で S から空節が導出可能となることである．ただし，節集合 $S = \{C_1, \cdots, C_m\}$ に対して，

$$d(S) = (\wedge C_1) \vee \cdots \vee (\wedge C_m)$$

と定める．$d(S)$ は論理和標準形の論理式である．

4　問題

この節では，導出計算 R_2 を，実際に問題に適用し，その問題の解を導く．以下の問は [1] の例である．

問　h, i, j, k はそれぞれヒロシ，イチロウ，ジュン，ケイコを表す．$B(x)$, $G(x)$, $T(x)$ はそれぞれ「x は男のである」,「x は女の子である」,「x は背が高い」を表し，また $F(x,y)$, $L(x,y)$ はそれぞれ「x は y と友達である」,「x は y が好きである」を表すものとする．いま

(1) イチロウは男の子でケイコは女の子である．

(2) ジュンの友達はみな背が高い．

(3) ヒロシは背が高い女の子は誰でも好きだ．

(4) イチロウとケイコはジュンの友達である．

と仮定する．目標は

(5) ジュンの友達のうち，ヒロシが好きな人がいる．

が正しいか．そして，それが正しいときに，それは誰か？という問に答えることとする．

解（ここでは [1] の解と双対な形を述べる）

上記の (1) から (5) を題意に基づき論理式で表すと

(1)$B(i) \wedge G(k)$

(2)$\forall x(F(j,x) \to T(x))$

(3)$\forall y(T(y) \wedge G(y) \to L(h,y))$

(4)$F(j,i) \wedge F(j,k)$

(5)$\exists z(L(h,z) \wedge F(j,z))$

のようになる．

まず，問の前半は，

$$((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) \supset (5) \text{ が恒真} \qquad (*)$$

かどうかを調べればよい．補助定理 2.1，補助定理 2.2，定理 3.2 より，量化記号を含まない論理式 A と節 S が存在して，

$$\begin{aligned} &((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) \supset (5) \text{ が恒真} \\ \Leftrightarrow\ & \exists x_1 \cdots \exists x_n A \text{ が恒真} \\ \Leftrightarrow\ & \exists x_1 \cdots \exists x_n d(S) \text{ が恒真} \\ \Leftrightarrow\ & R_2 \text{ で } S \text{ から空節}\Box\text{が導出可能} \end{aligned}$$

がいえる．よって，上の条件を満たす S を求めて，S から空節□を導く導出図を作成できるかを調べればよい．まず S を求める．

$$\begin{aligned} & ((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) \supset (5) \\ \equiv & \neg((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) \vee (5) \\ \equiv & \neg(1) \vee \neg(2) \vee \neg(3) \vee \neg(4) \vee (5) \\ \equiv & \neg B(i) \vee \neg G(k) \vee \exists x(F(j,x) \wedge \neg T(x)) \\ & \vee \exists y(T(y) \wedge G(y) \wedge \neg L(h,y)) \vee \neg F(j,i) \vee \neg F(j,k) \\ & \vee \exists z(L(h,z) \wedge F(j,z)) \\ \equiv & \exists x \exists y \exists z(\neg B(i) \vee \neg G(k) \vee (F(j,x) \wedge \neg T(x)) \\ & \vee (T(y) \wedge G(y) \wedge \neg L(h,y)) \vee \neg F(j,i) \\ & \vee \neg F(j,k) \vee (L(h,z) \wedge F(j,z))) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} S = \{ & \{\neg B(i)\}, \{\neg G(k)\}, \{F(j,x), \neg T(x)\}, \\ & \{T(y), G(y), \neg L(h,y)\}, \{\neg F(j,i)\}, \\ & \{\neg F(j,k)\}, \{L(h,z), F(j,z)\}\} \end{aligned}$$

この S から□に到る導出図を作成することができる（本稿では省略する）．よって，$(*)$ がいえるので，問の前半は「正しい」となる．

問の後半は，(5) の論理式から，省略した導出図における z へ代入されたものを考えればよい．その導出図では，z に k が代入されているので，ケイコが問の後半に対する答えである．

参考文献

[1] 小野寛晰：『情報科学における論理』．日本評論社，東京，1994.