フレキシブルアームに対する H_2 制御によるロバスト安定化

2009SE156 松井佑介 2009SE165 三輪有弘

指導教員　陳幹

1　はじめに

産業用ロボットなどに用いられているロボットアームの高速化や省エネ化といった要求に対し, アームは軽量であることが望ましい. しかし, 軽量化を行うことによりアームの剛性が低下し, それまで起きなかったたわみや振動が発生してしまう問題がある. これらはロボットの性能低下に繋がるため, それを制御によって抑制する必要がある. 本研究はフレキシブルアームの質量の変化によって生じる, プラントの慣性モーメントの変動に対して, H_2 制御によるロバスト安定化を行うことである. 本来, ロバスト性を持たない H_2 制御にロバスト性を持たせることで, 特性変動が起こったときでも正確に目標値に収束させるような制御を行う.

2　モデリング

2.1　フレキシブルアームについて

アーム部の重みが薄く, 軽量化したロボットアームの単純モデルである. そのため剛性が低く, アームの振る舞いは非常に振動的である. フレキシブルアームの制御量はアームの先端の角度であり, 操作量はアームにギアを介して取り付けられたモータの電圧である. また, 検出量はアームの根元の角度とアームのたわみの角度となっている.

2.2　単純化モデルによるモデリング

このモデルはトルクがモータと繋がっている hub(モータ) の部分にのみ働き, load(先端) は根元との間に繋がれたバネの力のみによって運動する. トルクを加えた時 hub は θ だけ回転し, load はそこから更に α だけ回転する. よって, $\gamma = \theta + \alpha$ が終点の絶対的な角度となる.

この角度がアームの先端角に相当する. J_{load} は load の慣性モーメントであり,K_{stiff} はモデルの剛性に相当するバネ定数であるとすると, 以下の式が得られる.

$$J_{load}\ddot{\alpha} = -K_{stiff}\alpha \tag{1}$$

減衰固有角周波数 ω_c と α の間には常に以下の関係が成立する.

$$\ddot{\alpha} = -\omega_c^2\alpha \tag{2}$$

(1), (2) 式より以下の式が得られる.

$$K_{stiff} = \omega_c^2 J_{load} \tag{3}$$

3　オイラー・ラグランジュの運動方程式

. 単純化したモデルに対してオイラー・ラグランジュの運動方程式を用いてシステムのモデリングを行う. オイラー・ラグランジュの運動方程式とは, システムを完全に表す独立な一般化座標 $q_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ と, 一般化座標に働く力やトルクを表す一般化力 $\tau_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ によって構成され, 運動エネルギー T, 位置エネルギー U, 損失エネルギー D を一般化座標 q_i とその時間微分 $\dot{q}_i$ の関数で表し, これを用いて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i(i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

によってシステムの運動方程式が求める手法である.

3.1　フレキシブルアームへの対応

オイラー・ラグランジュの運動方程式をフレキシブルアームに適用するため, 位置エネルギー, 運動エネルギー, 損失エネルギーを求める.

・位置エネルギー

$$U = \frac{1}{2}K_{stiff}\alpha^2 \tag{5}$$

・運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}J_{hub}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{load}(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \tag{6}$$

・損失エネルギー

$$D = \frac{1}{2}B_{eq}\dot{\theta}^2 \tag{7}$$

一般化座標は θ と α の二つであり, 一般化力をトルク τ とする. よって (4) 式よりオイラー・ラグランジュの運動方程式 (16),(17) を得る.

$$J_{hub}\ddot{\theta} + J_{load}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + B_{eq}\dot{\theta} = \tau \tag{8}$$

$$J_{load}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + K_{stiff}\alpha = 0 \tag{9}$$

上式より

$$\ddot{\theta} = \frac{K_{stiff}}{J_{hub}}\alpha - \frac{B_{eq}}{J_{hub}}\dot{\theta} + \frac{1}{J_{hub}}\tau \tag{10}$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{K_{stiff}(J_{load}+J_{hub})}{J_{load}J_{hub}}\alpha + \frac{B_{eq}}{J_{hub}}\dot{\theta} - \frac{1}{J_{hub}}\tau \tag{11}$$

よってシステムの運動方程式が得られた．しかしながら, 実際に制御するにあたり, 直接操作できるのはトルクではなく, モータに与える電圧である．そのため, モータに与える電圧 V と τ との関係を求める必要がある．ここで, 電機子回路入力電圧を V, 電機子回路電流を I_m, 電機子抵抗を R_m, 電機子インダクタンスを L_m とする．E_{emf} をモータの逆起電力, 逆起電力係数を K_m とし, トータルギア比を K_g とする．また, モータのトルクを τ_m, トルク定数を K_t, モータ効率を η_m とすると以下の式を得る

$$\tau_m = \frac{\eta_m K_t(V - K_m K_g\dot{\theta})}{R_m} \tag{12}$$

これはモータのトルクであり, hu には負荷ギアを介しているため, hub に与えるトルクを計算する必要がある．モータのトルクと hub に与えるトルク τ の関係式は以下の通りである．

$$\tau = \eta_g K_g \tau_m \tag{13}$$

ただし,η_g はギアボックス効率であり, モータに与える電圧と hub に与えるトルクは以下の通りである．

$$\tau = \frac{\eta_g\eta_m K_t K_g(V - K_m K_g\dot{\theta})}{R_m} \tag{14}$$

4　システムの状態空間表現

システムの状態ベクトル x を

$$x = \begin{bmatrix} \theta & \alpha & \dot{\theta} & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T \tag{15}$$

とすると制御入力を u とした状態空間表現は以下のようになる．

$$dot_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{stiff}}{J_{hub}} & -\frac{B_{eq}R_m+\eta_m\eta_g K_t K_g^2 K_m}{J_{hub}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_{stiff}(J_{load}+J_{hub})}{J_{load}J_{hub}} & \frac{B_{eq}R_m+\eta_m\eta_g KtK_g^2 K_m}{J_{hub}} & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_m\eta_g K_t K_g}{J_{hub}R_m} \\ -\frac{\eta_m\eta_g K_t K_g}{J_{hub}R_m} \end{bmatrix} u \tag{17}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \tag{18}$$

5　減衰固有角周波数

フレキシブルアームのアーム部をしっかりと固定し, その状態でアームに適切な初期値を与えて離す．アームは振動をしながらゆっくり減衰するので, その波形を計測する．計測した波形より周波数を測定し, その周波数を 2π 倍したものが, 減衰固有角周波数となる．

5.1　減衰固有角周波数の測定

減衰固有角周波数は, 同定実験を行って測定する. 具体的な手順は以下の通りである．

1. フレキシブルアームのアーム部を取り外し, 校正台に取り付ける．

2. 校正台に取り付けた状態でアームを適切な初期値を与えて離す. アームは振動をしながらゆっくり減衰するので, その波形を測定する．

上記の方法によって減衰固有角周波数は,

重りなしの時

$$\omega_c = 20.074 \tag{19}$$

50g の重りの時

$$\omega_c = 9.2946 \tag{20}$$

100g の重りの時

$$\omega_c = 7.0637 \tag{21}$$

となった．

6　細い一様な棒の慣性モーメント

全質量を M, 棒の長さ L, 面密度 λ, 微小線素片 ds, 線素までの距離を s とする．λ=$\frac{M}{L}$ であるので, 棒の慣性モーメント J_{load} は

$$J_{load} = \int_0^L \lambda s^2 ds = \lambda\frac{1}{3}L^3 = \frac{ML^2}{3} \tag{22}$$

数値を代入すると

重りなしの時

$$J_{load} = 0.0031$$

(2.3) 式より

$$K_{stiff} = 1.0913$$

今回, アームに重りをつけてシミュレーション, 実験を行う為, それをふまえて慣性モーメントを導出する．重りの質量を m とすると, 慣性モーメント J_{load} は

$$J_{load} = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 \tag{23}$$

数値を代入すると

50g の重りの時

$$J_{load} = 0.0132$$

(2.3) 式より

$$K_{stiff} = 1.1370$$

100g の重りの時

$$J_{load} = 0.0031$$

(2.3) 式より

$$K_{stiff} = 1.2674$$

K_{stiff} は, バネ定数であるため, 重りを付けていない時と 50g の重りを付けた時,100g の重りを付けた時の K_{stiff} の平均の値を今回の K_{stiff} の値として扱っていく.

$$K_{stiff} = 1.16523$$

7　一様な円盤の慣性モーメント

J_{hub} は $load$ の慣性モーメントとギアとモータの慣性モーメントの和となり, ギアの慣性モーメントはギアを一様な円盤として計算する.

全質量を M, 面密度 σ とする. 半径 r と $r+dr$ で囲まれる微小面積素片を ds とする. 円盤の慣性モーメント I は (4.11)(4.12) 式より下式になる.

$$I = \int dI = \int_0^a 2\pi\sigma\,\mathrm{r}^3 dr = \frac{Ma^2}{2} \tag{24}$$

よって,24 歯,72 歯,120 歯の慣性モーメント J_{24},J_{72},J_{120} の慣性モーメントはそれぞれ

$$J_{24} = 1.0081 \times 10^{-7} \tag{25}$$

$$J_{72} = 5.4435 \times 10^{-6} \tag{26}$$

$$J_{120} = 4.1835 \times 10^{-5} \tag{27}$$

モータとアームの間には 24 歯と 120 歯のギアを一枚ずつ, 72 歯のギアを二枚介している. トータルギア比 K_g は $K_g = K_{gt} \times K_{ge} = 70$ である. また,J_{hub} はギアとモータの慣性モーメントの和となるので

$$J_{hub} = J_{24} + 2 \times J_{72} + J_{120} + K_g^2 \times J_{motor} \times \eta_g = 0.0018 \tag{28}$$

7.1　パラメータの決定

7.1.1　各種パラメータ

7.2　変動パラメータ

今回アームに重りをつけることによって, アームの質量が変わる. パラメータの中でアームの質量がかかわってくるパラメータはアームの慣性モーメント J_{load} であることがわかった. よって変動パラメータは J_{load} であると考える. ここで, 状態方程式を導出する.

表 1　各種パラメータ

Symbol	Description	Value[Unit]
L	アーム長	20×10^{-2}[m]
M	アーム重量	65[g]
K_t	モータトルク定数	0.00767[Nm/A]
K_m	モータ逆起電力定数	0.00767[V/(rad/s)]
R_m	モータ電機子抵抗	2.6[Ω]
η_ε	ギアボックスの効率	0.9
η_m	モータ効率	0.69
J_{moter}	モータ慣性モーメント	$3.9001 \times 10^{-7}[kgm^2]$
K_{gi}	遊星ギア比	14
K_{ge}	ギア比	5
B_{eq}	アーム粘性摩擦係数	0.004[Nm/(rad/s)]
m_{24}	ギア（２４歯) 重量	5[g]
m_{72}	ギア（７２歯）重量	30[g]
m_{120}	ギア（１２０歯）重量	83[g]
r_{24}	ギア（２４歯）直径	$0.5 \times 2.45 \times 10^{-3}$[m]
r_{72}	ギア（７２歯）直径	$1.5 \times 2.45 \times 10^{-3}$[m]
r_{120}	ギア（１２０歯）直径	$2.5 \times 2.45 \times 10^{-3}$[m]
m_1	重りの重量	129[g]
m_2	重りの質量	69[g]

7.3　重りなしの時

$J_{load} = 0.0031$ $K_{stiff} = 1.2674$ $\omega_c = 20.074$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1774.2 & -277.7985 & 0 \\ 0 & -0.007 & 277.7958 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 488.9976 \\ -488.9976 \end{bmatrix} u \tag{29}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \tag{30}$$

7.4　アームの先端に５０ｇの重りを付けた時

$J_{load} = 0.0132$ $K_{stiff} = 1.1370$ $\omega_c = 9.2946$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 186.1636 & -277.7958 & 0 \\ 0 & -0.0008 & 277.19685 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 488.9976 \\ -4889976 \end{bmatrix} u \tag{31}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \tag{32}$$

7.5　アームの先端に１００ｇの重りを付けた時

$J_{load} = 0.0219$ $K_{stiff} = 1.0913$ $\omega_c = 0.0219$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2518 & -277.7958 & 0 \\ 0 & 0.0000009869 & 277.7958 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 488.9976 \\ -488.9976 \end{bmatrix} u \tag{33}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \tag{34}$$

8　制御系設計

出力を目標値に追従させるため, 制御ループ内に積分器を 1 つ付加した拡大系を用いる. 本報告ではモデル化誤差のうちアームの慣性モーメントの値に着目する. アームの慣性モーメント J_{load} の範囲は $0.0031 < J_{load} < 0.0219$ である. 運動方程式中の J_{load} の不確かさを構造的に抽出し, 不確かさの上下界の範囲においてロバストな制御系設計を試みる.J_{load} は行列 A に存在する. 行列 A, 行列 B は以下のように表現できる.

$$AT = \begin{bmatrix} A & 0^{4\times 1} \\ -C & 0 \end{bmatrix}, BT = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \tag{35}$$

ロバスト H_2 制御に対する一般化制御系を以下の式と定義する.

$$E_d\dot{x_d} = A_d x_d + I\omega + B_d u \tag{36}$$

$$z_2 = C_2 x_d + D_2 u \tag{37}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} BT \\ 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{38}$$

式 () 中の Q,R はそれぞれ状態変数に対する重み行列, 入力に対する重み行列である.J_{load} の不確かさが下界であるときの A_d を A_{d1}, 上界であるときを A_{d1} とする. 式 () を不確かさの上下界の範囲において安定化し,H_2 ノルムを最小化する状態フィードバックゲイン K を求める LMI は式 ()-() となる

$$minimize : \gamma \tag{39}$$

$$subject\ to : X > 0 \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix} H_e(A_i X + BY) & B_\omega \\ B_\omega^T & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{41}$$

$$\begin{bmatrix} X & (CX + DY)^T \\ CX + DY & W_s \end{bmatrix} > 0 \tag{42}$$

$$Trace(W_s) < \gamma^2 \tag{43}$$

$$(i = 1, 2)$$

式 ()-() を満たす X,Y を得ることで, 所望のフィードバックゲイン K は以下の式で与えられる.

$$K = YX^{-1} \tag{44}$$

式 () の重み行列 Q,R に対して式 ()-() の LMI を解いた結果, 式 () のような状態フィードバックゲイン K が得られた.

$$Q = diag(1000,\ 100,\ 1,\ 1,\ 10000),\ R = 80 \tag{45}$$

$$K = \begin{bmatrix} -7.4554 & 7.3802 & -1.8427 & -1.6222 & 11.1803 \end{bmatrix} \tag{46}$$

9　シミュレーション結果

第 5 章で設計したコントローラを用いて, 重りを付けていない時,50g の重りを付けた時,100g の重りを付けた時の 3 通りのシミュレーションを行った. このゲイン K を用いて, シミュレーションを行った結果を表したグラフが次のグラフである.

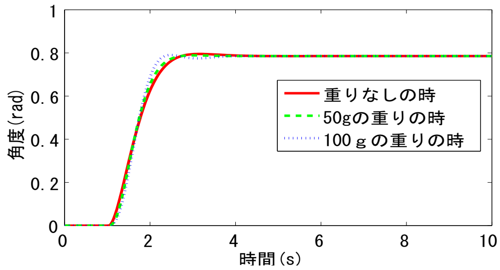

図 1　シミュレーショングラフ

グラフより, 重りを変えた場合でも重りがない場合でも近似したシミュレーション結果が得られた為, 実験に移った.

10　実験結果

シミュレーション結果より, 同様に 3 通りの実験を行った. その結果を表したグラフが次のグラフである.

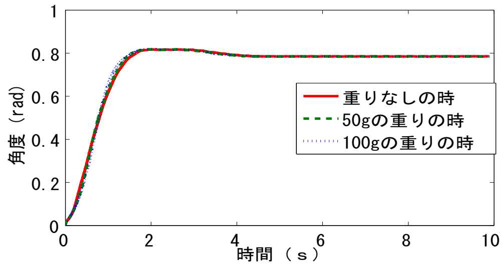

図 2　実験グラフ

グラフより, 重りを変えた場合でも重りがない場合でも近似した実験結果を得ることができた.

11　終わりに

参考文献

[1] 井上和夫＝監修　川田昌克＋西岡勝博＝著: 『MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学』森北出版, 東京,2001.

[2] 川田昌克著: 『MATLAB/Simlink による現代制御入門』森北出版, 東京,2011.

[3] 蛯原義雄著: 『LMI によるシステム制御』森北出版, 東京,2012.

[4] 水戸健詞: 最適レギュレータによるフレキシブルアームの制振制御, 南山大学数理情報学部 2010 年度卒業論文 (2012).