# 2 次元 Padua 点上の補間型積分則

2009SE192 長浜　陽平

指導教員：杉浦洋

## 1　はじめに

Morrow, Patterson, Xu は直積型チェビシェフ測度 $\mu$ を持つ長方形領域における近似積分則，$\mu$-MPX 則を提案した．Marco Caliari, Marco Vianello, Stefano DeMarchi, Roberto Montagna ら [1] は，その標本点を用いて長方形領域の単純かつ強力な多項式近似を提案した．本論文では，彼らの近似法を研究し，それを用いた長方形領域の数値積分公式 1-MPX 則を導く．また，数値実験を行いその特性を調べる．

## 2　チェビシェフ多項式

区間 $[-1,1]$ の連続関数全体を $C[-1,1]$ と書く．$f,g \in C[-1,1]$ の内積を

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)d\mu(x), \quad d\mu(x) = \frac{2dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad (1)$$

で定義する．$n$ 次チェビシェフ多項式 $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1} x) \qquad (|\, x \,| \le 1) \qquad (2)$$

により，正規化チェビシェフ多項式を

$$\hat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}T_0(x), \quad \hat{T}_n(x) = T_n(x) \qquad (n \ge 1)$$

とすると，

$$(\hat{T}_m, \hat{T}_n) = \delta_{mn} \qquad (m \ge 0, n \ge 0)$$

となる．

## 3　多項式空間に対する $\mu$-直交射影と超補間

### 3.1　$\mu$-直交射影

2 次元の正方形多項式 $\Omega = [-1,1]^2$ 上の連続関数全体を $C(\Omega)$ と書く．$f,g \in C(\Omega)$ の内積を

$$(f,g) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})d\mu(\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2), \quad d\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{4dx_1dx_2}{\pi^2\sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2}}$$

で定義する．2 次元正規化チェビシェフ多項式を

$$\hat{T}_{mn}(\boldsymbol{x}) = \hat{T}_{mn}(x_1,x_2) = \hat{T}_m(x_1)\hat{T}_n(x_2),$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2) \qquad (m \ge 0, n \ge 0)$$

で定義する．このとき，

$$(\hat{T}_{kl}, \hat{T}_{mn}) = \delta_{km}\delta_{ln} \qquad (k,l,m,n \ge 0). \qquad (3)$$

すなわち $\{\hat{T}_{mn}\}$ は $C(\Omega)$ の正規直交系となる．

$\Omega$ 上の $n$ 次多項式全体を $\prod_n^2 \subset C(\Omega)$ と書く．$f \in C(\Omega)$ から $\prod_n^2 \subset C(\Omega)$ への $\mu$-直交射影を $S_n$ とする．$S_n$ は

$$S_n f(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} K_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\mu(\boldsymbol{y}). \qquad ,\boldsymbol{x} \in \Omega \qquad (4)$$

と, 積分変換の形で書ける．ここで

$$K_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{k\ge 0, l \ge 0}^{k+l \le n} \hat{T}_{kl}(\boldsymbol{x})\hat{T}_{kl}(\boldsymbol{y})$$

は $\prod_n^2 \subset C(\Omega)$ の再成核と呼ばれる．

### 3.2　超補間

$\Omega$ 上の 2 次元数値積分 ($N$ 点則) を

$$Q_N f = \sum_{i=1}^{N} \omega_i f(\boldsymbol{\xi}_i) \cong \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})d\mu(\boldsymbol{x}) \qquad (5)$$

とし (4) の積分を $Q_N$ で置き換えると $S_n$ の近似

$$L_n f = \sum_{i=1}^{N} \omega_i K_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_i)f(\boldsymbol{\xi}_i) \cong S_n f \qquad (6)$$

が得られる．これを近似積分 $Q_N$ による $f$ の超補間と言う．

## 4　$\mu$-MPX 則

本論文では，重み $\mu$ の積分の近似 $Q_N$ として，Morrow, Patterson，Xu の提案した積分則 (MPX 則) を採用する．MPX 則を

$$Q_N f = \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} \omega_{\boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{\xi})$$

と書く．$\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ は標本点，$\omega_{\boldsymbol{\xi}}$ は $\boldsymbol{\xi}$ 上の重みである．

［定理 1］MPX 則は全ての $p \in \prod_{2n+1}^2$ を正確に積分する．すなわち

$$Q_N p = \int_{\Omega} p(\boldsymbol{x})d\mu(\boldsymbol{x}). //$$

## 5　1-MPX 則

### 5.1　1-MPX 則の導出

$\Omega$ 上の重み 1 の積分

$$If = \iint_{\Omega} f(\boldsymbol{x})ds(\boldsymbol{x}) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy$$

に対する MPX 点上の積分則を MPX 則と呼ぶ．具体的な積分則は,

$$I_n f = \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} \rho_{\boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{\xi})$$

であり，重み

$$\rho_{\boldsymbol{\xi}} = \omega_{\boldsymbol{\xi}} \iint_{\Omega} K_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) ds(\boldsymbol{x})$$

は，あらかじめ計算して覚えておく．

[定理 2] パラメタ $n$ の 1-MPX 則 $I_n$ の次数は，パラメタ $n$ が奇数なら $n$ 次，$n$ が偶数なら $n+1$ 次である．// 1-MPX 則はパラメタ $n$ が偶数のときのほうが高精度である．

## 6　数値実験

Mathmematica による 1-MPX 則の数値実験結果を報告する．計算機は FUJITSU FMV-S8370，CPU，は，Intel Core2 Duo 2.10Hz，Windows Vista の上で Mathmematica　ver.8.0.1.0 を用いてプログラムを開発し数値実験を行った．

以下では，1-MPX 則 (MPX 則)，2 次元直積型ガウス・ルジャンドル則 (ガウス則) と 2 次元直積型クレンショウ・カーチス則 (C-C 則) でいくつかの関数を積分し比較する．1-MPX 則のパラメタ $n$ は偶数とした．

まず，被積分関数

$$f(x, y) = e^{-32(x^2+y^2)}, \quad n = 30$$

を積分した結果を示す．被積分関数は図 1 に示すように，

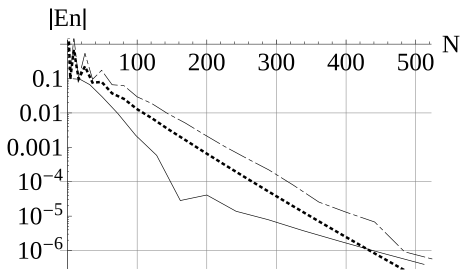


図 1　$f(x, y) = e^{-32(x^2+y^2)}$

急峻なピークを持つ．積分誤差の片対数グラフを図 2 に示す．このときは，MPX 則が最も精度が高くなり，次にガウス則，C-C 則と続く．MPX 則は，中程度の精度ではガウス則をしのぐ．

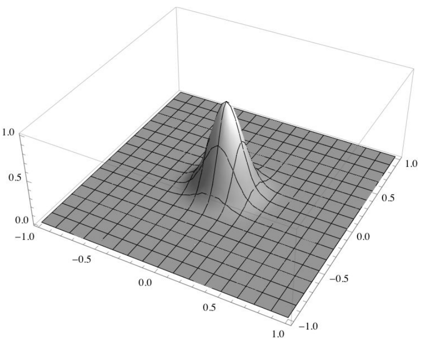


図 2　$f(x, y) = e^{-32(x^2+y^2)}$

次に振動数の高い

$$f(x, y) = \cos[10(x + y)]$$

を積分する (図 3)．

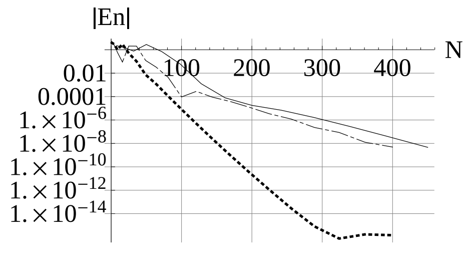


図 3　$f(x, y) = \cos[10(x + y)]$

このときは，ガウス則が最も精度が高く，次に C-C 則，MPX 則と続く (図 4)．ガウス則は振動関数に強いことがわかる．

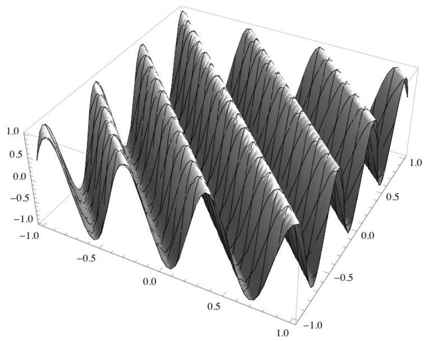


図 4　$f(x, y) = \cos[10(x + y)]$

以上の実験結果から，ピークを持つ関数で低精度の積分を行うときには MPX 則が良い．また，高精度の積分を行うときにはガウス則が良い．振動積分においては，ガウス則が圧倒的に強い．

## 7　おわりに

本研究では，Marco Caliari, Marco Vianello, Stefano De Marchi, Roberto Montagna[2] に従って，２次元長方形領域の超補間について研究した．そして，超補間多項式を積分することにより数値積分則 (1-MPX 則) を構成した．1-MPX 則の次数に関する定理を導いた．1-MPX 則のパラメタ $n$ が奇数のときは $n$ 次，偶数のときは $n+1$ 次である．数値実験により 1-MPX 則の特性を調べた．1-MPX 則はピーク型の関数に対し，直積型クレンショウ・カーチス則より高性能であった．また低精度の範囲では直積型ガウス則よりも優れていた．

## 参考文献

[1] Marco Caliari, Marco Vianello, Stefano De Marchi, Roberto Montagna : Hyper2d: a numerical code for hyperinterpolation on rectangles, Applied Mathematics and Computation, Volume 183, Issue 2, Pages 1138-1147(2006).