記号化により理解する証明のしくみ

2009SE193 永井千尋

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は，証明すべき文の記号化によって，その証明を導く過程を理解することである．具体的には，

1. 証明すべき文の適切な記号化
2. 証明における各推論規則が用いられる理由

を考える．1 の理解には，[1],[4] を用いた．2 は，前件と後件をペアにしたシークエントを基本表現とするシークエント体系をもとに考える．特にその体系 SNK に基づく推論については，SNK の性質から，その理由づけを行う．対象とする文は，[5],[6] から抽出した整数・実数の性質である．これらの性質に対し，その記号化，SNK に基づく証明，その推論を用いた理由，実際の証明を記述する．

本稿では，2 節で，用いる記号を導入し，シークエント体系 SNK における推論の適用法を示す．3 節では，この研究で扱った具体的な証明のうち 2 つを示す．なお，SNK 推論規則は，[3] に示されたものを使う．

2 記号法と体系 SNK

2.1 用いる記号と意味

ここでは記号表現に用いる記号を導入する．

- 論理記号：$\neg$(でない), $\wedge$(かつ), $\vee$(または), $\supset$(ならば), $\forall$(すべて/任意の), $\exists$(ある/存在する)
- 関係を表す記号：$=, \in, \mid$ （「x が y を割り切る」を $x \mid y$ と表現)
- 関数を表す記号：普通の四則演算の記号と **mod**
- 特定の集合を表す記号：$\mathbb{Q}$(有理数全体), $\mathbb{Z}$(整数全体)

2.2 SNK 推論規則の適用順序

体系 SNK における，シークエント S の証明は，S から SNK 推論規則を積み上げることによって作成できる．以下に，S からどのように SNK 推論規則を積み上げるべきかについて，[2] で述べられている方針を列挙する．

- 上式が 2 つの規則 ($\wedge$ 右),($\vee$ 左),($\supset$ 左) は後 (上) で適用する．
- ($\exists$ 左),($\forall$ 右),($\forall \supset$ 右) は先 (下) で適用する．
- SNK 推論規則の積み上げ方が明らかでないときは，失敗しない規則 (上式と下式の証明可能性が同値である規則) は先 (下) で適用する．
- 上式が下式より複雑な規則 (RAA),(cut) は後 (上) で適用する．

3 証明のしくみ

この節では，[5],[6] から抽出した整数・実数の性質 (2 つ) に対し，その記号化，SNK に基づく証明，その推論を用いた理由，実際の証明を述べる．SNK に基づく証明は，与えられたシークエントから SNK 推論規則，またはその組み合わせと，実際に行う推論に対応する規則を積み上げてできる図で表現する．

性質 1. 整数 a, b, c, d が等式 $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たすとする．d が 3 の倍数でないならば，a, b, c の中に 3 の倍数がちょうど 2 つあることを示せ ([6])．

[記号化]

「a, b, c の中に 3 の倍数が k 個ある」を $P(k)$ とおく．今回は，「a, b, c の中に 3 の倍数がちょうど 2 個ある」ので，$P(2)$ となる．これを用いて記号化する．すると，求める記号化は

$$a^2+b^2+c^2=d^2 \to 3 \nmid d \supset P(2)$$

である．

[SNK に基づく証明]

図 1 に示す．

[各推論の解説]

[1]～[2]: SNK の優先順位から ($\supset$ 右) を選ぶ.

[2]～[3]: $3 \nmid d$ から，3 で割ったときの余りに注目すると，$d=3n+1 \vee d=3n+2$ とおける．

[3]～[4]: $a^2+b^2+c^2=d^2$ が前提にあるので，これを用いるために d^2 を計算する．

[4]～[5]: 使用できる推論規則は，背理法 (RAA) のみである．また，$\neg P(2)$ は $P(0) \vee P(1) \vee P(3)$ と同値であることから，情報を取り出しやすいため，背理法を使う．

[5]: $P(0), P(1), P(3)$ の各場合について，$a^2+b^2+c^2$ を計算すると，$3m, 3m+2$(m は整数) のいずれかになる．よって，$a^2+b^2+c^2=d^2$ に矛盾する．

[実際の証明]

d は 3 の倍数でないので，

$$d = 3n+1, 3n+2 (n \text{ は整数})$$

のいずれかが成り立つ．それぞれの 2 乗を計算すると，

$$d^2=(3n+1)^2=3(3n^2+2n)+1$$
$$d^2=(3n+2)^2=3(3n^2+4n+1)+1$$

である．よって，

$$d^2 \text{を 3 で割った余りは 1} \qquad (*1)$$

となる．ここで，背理法により，「a, b, c の中に 3 の倍数がちょうど 2 つある」の否定，すなわち，次の (i),(ii),(iii) のいずれかが成り立つとして矛盾を導く．

(i)a, b, c がすべて 3 の倍数のとき

(ii)a, b, c のうち 1 つだけが 3 の倍数のとき

(iii)a, b, c がどれも 3 の倍数でないとき

(i) のとき，$a^2+b^2+c^2$ は 3 で割り切れるので，$a^2+b^2+c^2=d^2$ より d^2 も 3 の倍数．これは $(*1)$ に矛盾する．

(ii),(iii) のとき，$(*1)$ と同様にして，$a^2+b^2+c^2$ を 3 で割った余りは，(ii) のときは 2 となり，(iii) のときは 0 となる．これは，$(*1)$ に矛盾する．

(i)～(iii) より，d が 3 の倍数でないならば，a, b, c の中に 3 の倍数がちょうど 2 つある． □

性質 2.a, b が有理数のとき，$a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ．ただし，$\sqrt{2}$ は無理数である ([5])．

[記号化]

「x が有理数である」は $x \in \mathbb{Q}$,「x が無理数である」は $x \notin \mathbb{Q}$ と記号化できるので，求める記号化は

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \to a+b\sqrt{2}=0 \supset a=0 \wedge b=0$

である．

[SNK に基づく証明]

図 2 に示す.

[各推論の解説]

[1]∼[2]: SNK の優先順位から ($\supset$ 右) を選ぶ.

[2]∼[3]: SNK の優先順位から選ぶと，($\wedge$ 右) となる．その左の上式の証明図を示すと，以下のようになる．

$$\dfrac{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, a+b\sqrt{2}=0, a \neq 0 \to \perp}{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, a+b\sqrt{2}=0 \to a=0}\ (RAA)$$

この図から，左の上式の証明が困難なものとわかるため，(cut) で排中律を入れる方法を用いる．

[3]∼[4]: SNK の優先順位から ($\vee$ 左) を選ぶ.

[4]∼[5]: [4] を下式とする ($\wedge$ 右) の右の上式を考えると，左辺にも $b \neq 0$ があることから，右辺の $b=0$ は $\perp$ でも証明できるはずである．すなわち [4] は，[4] の右辺を $\perp$ にしても証明できることになる．このことから，(w 右) を選ぶ.

[5]∼[6]: SNK の優先順位から ($\neg$ 左) を選ぶ.

[6]∼[7]: 「x は有理数である」は，$x \in \mathbb{Q}$ の他に $\exists m \in \mathbb{Z} \exists n \in \mathbb{Z}(x=\frac{m}{n})$ と表すことができる．左辺に $\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$ があり，右辺も同じ様な形にしたいため，($\exists$ 右) を選ぶ.

[実際の証明]

$a+b\sqrt{2}=0$ を仮定する．ここで，$b=0$ または $b \neq 0$ は明らかなので，2 通りで場合分けをする．

(i)$b=0$ のとき

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{2}&=0 \\ a&=-b\sqrt{2} \\ a&=0 \end{aligned}$$

よって，$a=b=0$ である．

(ii)$b \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{2}&=0 \\ \sqrt{2}&=-\frac{a}{b} \end{aligned}$$

よって，$\sqrt{2}$ は有理数である．これは，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．したがって，$b \neq 0$ のときは起こらない．

(i),(ii) より，$a=b=0$ である．

よって，a, b が有理数であるとき $a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ である． □

4 おわりに

この研究を行うにあたり，正しく記号化することで，文の構造や内容が見えてくるため，実証明がどのようにして成り立っているのか理解できるということがわかった．また複雑な問題は，和文を直接記号化するのではなくキーワードを抜き出して，それを記号に置き換えて記号化することで，証明図が簡略化され見やすくなることがわかった．

今後は，本研究をどのように数学教育に役立てていけるかや，どのような時期にならば取り入れることが可能なのかということも考えていきたい．

参考文献

[1] 新井紀子 :『数学は言葉』, 東京図書, 東京，2009.

[2] 佐々木克巳: 『南山大学情報理工学部講義科目「数理論理学」講義資料』,2011.

[3] 佐々木克巳: 「シークエント体系の証明図から実証明を作る方法」, アカデミア情報理工学編第 11 巻, pp.35-54,2011.

[4] 佐々木克巳: 『南山大学大学院数理情報研究科講義科目「数理論理学研究」補充資料 1』,2012.

[5] チャート研究所: 『新課程　チャート式　基礎からの数学 I+A』, 数研出版, 東京,2003.

[6] 柳川高明: 『新課程　チャート式　数学 A』, 数研出版, 東京,2003.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a^2+b^2+c^2=d^2, d^2=3(3n^2+2n)+1 \vee d^2=3(3n^2+4n+1)+1, P(0) \vee P(1) \vee P(3) \to \perp \quad [5]}{a^2+b^2+c^2=d^2, d^2=3(3n^2+2n)+1 \vee d^2=3(3n^2+4n+1)+1 \to P(2) \quad [4]}\ (RAA)}{a^2+b^2+c^2=d^2, d=3n+1 \vee d=3n+2 \to P(2) \quad [3]}}{a^2+b^2+c^2=d^2, 3 \nmid d \to P(2) \quad [2]}}{a^2+b^2+c^2=d^2 \to 3 \nmid d \supset P(2) \quad [1]}\ (\supset 右)$$

図 1　性質 1 の SNK に基づく証明

$$\dfrac{\dfrac{b=0, a=-b\sqrt{2} \to a=0 \wedge b=0 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}=-\frac{a}{b} \to \sqrt{2}=-\frac{a}{b} \quad [7]}{b \neq 0, \sqrt{2}=-\frac{a}{b} \to \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad [6]}\ (\exists 右)}{b \neq 0, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2}=-\frac{a}{b} \to \perp \quad [5]}\ (\neg 左)}{b \neq 0, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2}=-\frac{a}{b} \to a=0 \wedge b=0 \quad [4]}\ (w 右)}{b \neq 0 \vee b=0, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, a+b\sqrt{2}=0 \to a=0 \wedge b=0 \quad [3]}\ (\vee 左)}{\dfrac{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}, a+b\sqrt{2}=0 \to a=0 \wedge b=0 \quad [2]}{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \to a+b\sqrt{2}=0 \supset a=0 \wedge b=0 \quad [1]}\ (\supset 右)}\ (cut, 排中律)$$

図 2　性質 2 の SNK に基づく証明