

代用電荷法による等角写像の研究

2009SE195 永田知史

指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

代用電荷法は、2次元ラプラス方程式の数値解法として提案された。2次元領域 D におけるラプラス方程式の解である調和関数を、領域の外に配置された2次元点電荷の作る電場と想定し、境界条件に合わせて点電荷の電荷量を調整する。天野は、近似解の共役調和関数が簡単に得られることに注目し、代用電荷法を数値等角写像の計算法に発展させた。

本研究では、任意の単連結領域 D を単位円に写す等角写像を取り上げ、天野の方法を学び、小山田のプログラムを最小2乗法を用いて改良し、その効果を調べることが目的とする。

2 天野のアルゴリズム

天野は、複素平面の原点を含む有界単連結領域 D から、単位円板への近似等角写像 f_n を

$$f_n(z) = ze^{P_n(z)}$$
$$P_n(z) = -\sum_{i=1}^n q_i \log |z - \zeta_i| - i \sum_{i=1}^n q_i \arg(1 - \frac{z}{\zeta_i})$$

で表現する。 $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$ である。これを天野の近似モデルという。ここで、 ζ_i は D の外部にとられ、電荷点と呼ばれる。 q_i は、電荷量である。

$$\operatorname{Re} P_n(z) = 0 \quad (z \in \partial D)$$

なら、 $f_n(z)$ は真の等角写像である。天野は、この条件を離散化した

$$\log |z_j| - \sum_{i=1}^n q_i \log |z_j - \zeta_i| = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \quad (1)$$

により、電荷量を q_i を決定する。 z_j は ∂D 上にとられ、拘束点と呼ばれる。

3 最小2乗法による改良

小山田の実験 [2] によれば、線形方程式 (1) は頻繁に悪条件方程式となる。極端な場合には、方程式が数値的に解けなくなる。これを改善するために、本研究では拘束点数を電荷点数より大きくし方程式 (1) を過剰条件方程式とし、それを最小2乗法で解くことにした。具体的には、電荷点数 n に対し拘束点数 $m > n$ とし過剰条件方程式

$$\log |z_j| - \sum_{i=1}^n q_i \log |z_j - \zeta_i| = 0 \quad (1 \leq j \leq m) \quad (2)$$

を最小2乗法で解く。数値実験では、 $m = 2n$ と $m = 4n$ の二通りを試みた。

拘束点を増やすことにより、拘束点上で誤差を0にすることは不可能となる。しかし、より多くの拘束点で一律に誤差を減らすことができ、誤差特性が安定となることが期待できる。また、方程式数を増やせば条件数は減少するとしても増加はしない。特に、天野の方程式 (1) が非常に悪条件となるときには条件数の大きな改善が期待できる。

4 数値実験 (Cassini の楕形)

数値実験として小山田 [2] で失敗の多かった Cassini の楕形 (図 1) から単位円への等角写像を求める問題を取り上げる。Cassini の楕形は2定点 $(-1, 0)$, $(1, 0)$ からの距離の積が一定値 a^4 であるような点の軌跡

$$C : \{(x+1)^2 + y^2\}\{(x-1)^2 + y^2\} = a^4$$

である。 C の内部を単位円の内部、原点を原点に写す等角写像 $w = f(z)$ で、 $f'(0) > 0$ を満たすものを求める。写像関数は、

$$f(z) = \frac{az}{\sqrt{a^4 - 1 + z^2}}$$

であることが知られている。 a の値は

$$a = 2^{1/2}, 2^{1/8}, 2^{1/32}$$

とした。ここでは、凹型領域の例として、 $1 < a \leq \sqrt{2}$ の範囲を取り上げた。

4.1 拘束点と電荷点の配置

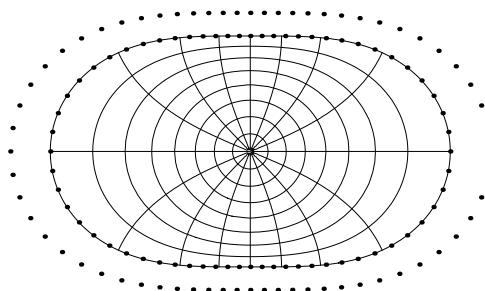


図 1 Cassini の楕形と拘束点・電荷点

Cassini の楕形を極座標表示すると

$$(x, y) = r(\cos t, \sin t),$$

$$r = \sqrt{2 \cos^2 t - 1 + \sqrt{(2 \cos^2 t - 1)^2 + a^4 - 1}}.$$

したがって、領域拡大法 [1] による拘束点 z_j ($1 \leq j \leq m$)、電荷点 ζ_j ($1 \leq j \leq n$) は

$$z_j = r(\theta_j)e^{i\tau_j}, \quad \theta_j = \frac{2\pi}{m}j \quad (0 \leq j < m),$$

表 1 Cassini の楕形 ($m = n$)

a	R_Q	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$
			E_R 条件数	
$2^{1/2}$	1.2	1.59×10^{-2} 1.59×10^1	6.72×10^{-4} 1.75×10^2	3.36×10^{-6} 2.80×10^5
	1.4	5.23×10^{-3} 8.07×10^1	2.21×10^{-4} 1.16×10^4	3.08×10^{-5} 6.81×10^9
	1.6	2.23×10^{-3} 3.53×10^2	3.37×10^{-4} 4.27×10^5	7.79×10^{-5} 4.03×10^{12}
	1.8	1.22×10^{-3} 1.33×10^3	2.91×10^{-4} 6.83×10^6	7.97×10^{-5} 5.30×10^{14}
$2^{1/8}$	1.2	3.82×10^{-2} 1.05×10^1	7.22×10^{-3} 1.30×10^2	6.71×10^{-2} 3.70×10^8
	1.4	1.47×10^{-2} 4.14×10^1	6.16×10^{-2} 1.61×10^5	1.69×10^{15}
$2^{1/32}$	1.2	4.64×10^{-2} 1.60×10^1	1.65×10^{-2} 1.62×10^2	6.09×10^{-2} 1.26×10^8
	1.4	1.14×10^{-2} 4.48×10^1	3.39×10^{-2} 8.86×10^4	1.15×10^{17}

表 2 Cassini の楕形 ($m = 2n$)

a	R_Q	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$
		$m = 32$	$m = 64$	$m = 128$
			E_R 条件数	
$2^{1/2}$	1.2	1.05×10^{-2} 2.16×10^1	3.80×10^{-4} 1.92×10^2	2.07×10^{-6} 8.08×10^3
	1.4	3.21×10^{-3} 9.38×10^1	4.21×10^{-5} 3.19×10^3	6.77×10^{-9} 2.14×10^6
	1.6	9.43×10^{-4} 3.31×10^2	1.55×10^{-5} 3.80×10^4	5.97×10^{-9} 3.04×10^8
	1.8	3.96×10^{-4} 1.00×10^3	8.62×10^{-6} 3.42×10^5	6.26×10^{-9} 2.49×10^{10}
$2^{1/8}$	1.2	2.53×10^{-2} 1.43×10^1	3.18×10^{-3} 1.32×10^2	2.56×10^{-4} 6.02×10^3
	1.4	4.87×10^{-3} 4.25×10^1	2.97×10^{-4} 1.55×10^3	3.30×10^{-6} 1.19×10^6
$2^{1/32}$	1.2	4.10×10^{-2} 2.23×10^1	1.32×10^{-2} 2.10×10^2	3.28×10^{-3} 9.80×10^3
	1.4	3.02×10^{-3} 5.83×10^1	5.84×10^{-4} 2.07×10^3	1.02×10^{-4} 1.60×10^6

$$\zeta_j = R_Q r(\theta_j) e^{i\theta_j}, \quad \theta_j = \frac{2\pi}{n} j \quad (0 \leq j < n)$$

となる。ここで、 $R_Q > 0$ は領域拡大率である。計算結果の誤差を観測する点を

$$\xi_j = r(t_j) e^{it_j}, \quad t_j = \frac{\pi}{2m} j \quad (0 \leq j < 4m)$$

とする。そして、最大絶対誤差を

$$E_R = \max_{0 \leq j < 4m} |f_n(\xi_j) - f(\xi_j)| \quad (3)$$

で計算する。

4.2 実験結果

・ $m = n$ の場合

$m = n$ のときは、従来の線形方程式による解法 (小山田の方法) と同値である。表 1 に各 n , R_Q , a に対する $f_n(z)$ の誤差 E_R と線形方程式 (1) の係数行列の条件数を示す。この表で $n = 64$, $a = 2^{1/8}$, $R_Q = 1.4$ と $n = 64$, $a = 2^{1/32}$, $R_Q = 1.4$ の欄は条件数以外のデータがない。これは、条件数が大きすぎて線形方程式が解けなかったことを示す。今回の研究の目的は、このような欠点を克服すると共に精度を向上させることである。

・ $m = 2n$ の場合

この場合は、電荷量の方程式は最小 2 乗法問題となる。設定した全ての条件で方程式は正常に解けた。小山田の実験で解法が破綻した二例も問題なく解けた。解の精度は全て小山田 ($m = n$) の結果を上回った。また、条件数は全てより小さくなり、方程式の悪条件性を回避できた。拘束点を増加させる戦略は非常に有効であった。

・ $m = 4n$ の場合

拘束点数をさらに倍増して実験を行ったが、実験結果は $m = 2n$ の場合とほとんど変わらなかった。この問題においては $m = 2n$ で十分であると判断される。

5 おわりに

代用電荷法による等角写像について研究した。まず基礎的な実験として、複素平面の原点に電荷量 -1 の 2 次元点電荷を置き、それが作る複素ポテンシャルを補助電荷を用いて変形する実験を行った。その結果、比較的少ない補助電荷数で、等電位線の形状が多様に変化することがわかった。代用電荷法では、複素ポテンシャルと指数関数の合成関数で単位円板への等角写像を構成する。その際、電位 0 の等電位線が単位円に写像される。上記の基礎実験で代用電荷法の可能性が実感できた。

電荷数 n より拘束点数 m を大きくし、最小 2 乗法問題を解いて等角写像を求める代用電荷法のプログラムを Mathematica 上で実現した。天野の代用電荷法と比較するために、原像を Cassini の楕形とした問題を取り上げ、天野の数値例を 24 例を全て追試した。その結果、今回の方法によりすごく精度が向上することを発見した。また、天野で悪条件のために計算ができなかった例が、我々の実験では正常に計算できた。

以上から、最小 2 乗法により代用電荷法の安定性と精度が大きく改善されることがわかった。

この問題では、拘束点数は電荷点数の 2 倍で十分であったが、一般的な原則は未知である。今後の課題は、適切な拘束点数の決定法を定めることである。

6 参考文献

- [1] 天野要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法. 情報処理学会論文誌, vol.28, No7, pp.697-704, 1987.
- [2] 小寺平治: 複素解析. 共立出版株式会社, 2010.
- [3] 山口昭男: 岩波 数学辞典 第 4 版. 岩波書店, 2007.
- [4] 小山田麻祐子: 代用電荷法による等角写像の計算. 南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2011 年度卒業論文集 2012.