

ペンダボットの量子化制御

2009SE261 鷲見智 2009SE316 安田有作

担当教員：大石泰章

1 はじめに

これまでの制御理論では、主に制御入力連続値であるシステムを対象としてきた。しかし、多段階型 (ON-OFF 型など) の場合、制御入力は離散値に限定される。この場合、入力が連続値であると仮定してフィードバック系を構成しても望んだ結果を得られるとは限らない。解決策の一つとして、「制御対象の入力が連続値である」と仮定してコントローラを設計し、制御対象とコントローラをつなぐ量子化器 Q を、その影響ができるだけ小さくなるように設計することが考えられる [1][2][3]。ただし量子化器は連続値信号を離散値信号へ変換する装置であり、特に東・南・杉江 [1][2][3] は動的な量子化器の利用を提案した。しかし東・杉江 [4] によると、制御対象が不安定な場合、動的量子化器の設計には注意が必要である。

ペンダボットは倒立振子の一つであり、制御工学の分野全般において、実験や理論検証等のために使用されている。しかしペンダボットは不安定であるため、動的量子化器が設計できるかどうか検証の必要がある。

本研究では、ペンダボットの非線形モデルを導出し、線形近似を行う。またペンダボットの不安定性に注意し、文献 [4][5] に従い、2つの手法で動的量子化器の設計をする。次にシミュレーション結果から、2つの得られた動的量子化器の性能の比較を行うと共に、動的量子化器の有用性を検証する。

2 量子化器と制御対象

2.1 量子化器とは

ここでいう量子化器とは連続値信号を離散値信号に変換する装置のことである。最も簡単な量子化器は、図1の関数 q によって現在の入力 $u(k)$ から現在の量子化出力が $q[u(k)]$ が決まるようなもので、これを静的量子化器という。一方、今回の研究では、現在の入力値から現在の量子化出力が定まる静的な量子化器ではなく、現在の入力値に加え、過去の入力情報も利用して現在の量子化出力を定める動的な量子化器に焦点を当てる。

2.2 最適動的量子化器

東・南・杉江 [1][2][3] は、図2のような通常のフィードバック制御系の出力 $z(k)$ と図3のような制御系に動的量子化器が直列された離散値フィードバック系の出力 $z(k)$ の振る舞いを近くすることを考え、特に最適動的量子化器の設計法を提案している。フィードフォワードシステムでの動的量子化器、フィードバックシステムでの動的量子化器の設計方法が知られているが、ペンダボットは不安定なシステムであるため、本研究ではフィードバックシステムに対する動的量子化器を設計する。ここで、制御対象 P

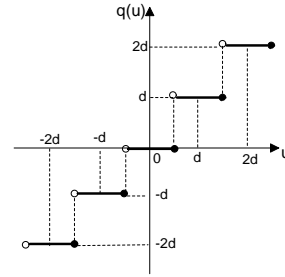


図1 静的量子化器の例

は、

$$P: \begin{cases} x_P(k+1) &= A_P x_P(k) + B_P u_Q(k) \\ z(k) &= C_{1P} x_P(k) \\ y(k) &= C_{2P} x_P(k) \end{cases} \quad (1)$$

と書けるとし、またコントローラ K は、

$$K: \begin{cases} x_K(k+1) &= A_K x_K + B_{1K} y(k) + B_{2K} r(k) \\ u(k) &= C_K x_K + D_{1K} y(k) + D_{2K} r(k) \end{cases} \quad (2)$$

と書けるとする。一方量子化器 Q は、

$$Q: \begin{cases} \xi(k+1) &= A_Q \xi(k) + B_{1Q} u(k) + B_{2Q} u_Q(k) \\ u_Q(k) &= q[C_Q \xi(k) + D_Q u(k)] \end{cases} \quad (3)$$

となる形のものとする。ここで $\xi(k)$ は量子化器の状態変数であり、 q は図1の関数を成分ごとに適用する静的量子化器である。制御入力 u_Q と制御出力 z の数は同じとし、 $C_{1P} B_P$ は正則であるとする。図2の制御対象 P とコントローラ K のそれぞれの状態変数を $x(k) := [x_P(k)^T \ x_K(k)^T]^T$ と定義し x_0 を初期状態とする。参照信号 $(r(0), r(1), \dots)$ が与えられているとき、図2の連続値入力型フィードバックシステムの初期状態 x_0 に対する出力を $z^*(k, x_0)$ ($k = 0, 1, \dots$) で表し図3の離散値入力型フィードバックシステムの初期状態 x_0 に対する出力を $z(k, x_0)$ ($k = 0, 1, \dots$) で表す。このとき評価関数として、

$$E(Q, R) := \sup_{x_0} \sup_{k=0,1,\dots} \|z^*(k, x_0) - z(k, x_0)\| \quad (4)$$

が考えられ、この評価関数を最小にする Q を求めれば最適動的量子化器を求めることが出来る。また文献 [4] より最適動的量子化器は制御対象の逆システムとなる。そのため制御対象が不安定な場合、量子化器と制御対象との間で不安定な極零相殺が生じる。

2.3 制御対象

本研究では制御対象として、ペンダボットを使用する。図4にその概略図を示す。モデリングに用いるパラメータを表1のように定義する。

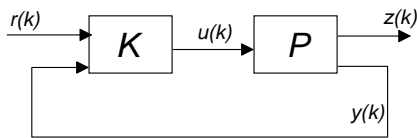


図 2 連続値型フィードバック系

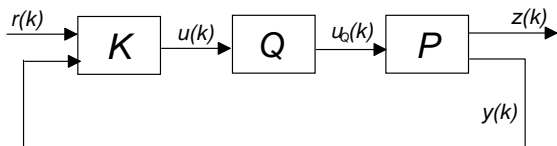


図 3 離散値型フィードバック系

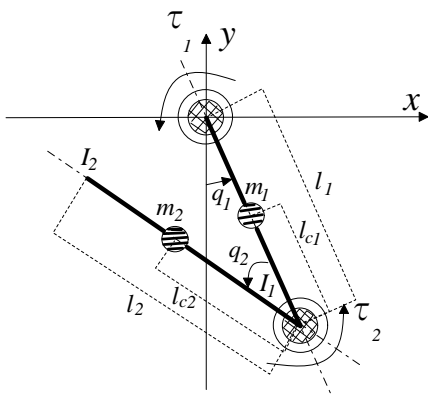


図 4 ペンダボットのモデル

図 4 の運動方程式は、ラグランジュの運動方程式を使って求めることができる。求めたペンダボットの運動方程式から制御系設計のための状態方程式を求める。しかし、求めた状態方程式は非線形方程式であるため、 $q_1 = 0, q_2 = 0$ においてテイラー展開し、線形化を行う。またペンダボットは不安定なシステムなため、量子化器とペンダボットの間で不安定な極零相殺が生じる。そのため文献 [2] の手法で求めた最適動的量子化器を用いたシステムは不安定となる。

3 有限時間近似に基づく動的量子化器

2 章では制御対象が不安定な場合、不安定な極零問題が生じることを述べた。その解決策として文献 [4], [5] に従い、準最適解を用いることで、安定なシステムを得ることを考える。また有限時間近似により得られた解くべき最適化問題において、次数の変更による性能の評価を行う。

3.1 有限時間近似による動的量子化器の設計

今回解く最適化問題において、目的関数が無限級数であり、制約式も無限個となる。さらにこのままでは非凸であ

表 1 パラメータ

l_1	リンク 1 の長さ [m]
l_2	リンク 2 の長さ [m]
l_{c1}	リンク 1 の支点から重心までの長さ [m]
l_{c2}	リンク 2 の支点から重心までの長さ [m]
m_1	リンク 1 全体の質量 [kg]
m_2	リンク 2 全体の質量 [kg]
I_1	リンク 1 に働く慣性モーメント [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
I_2	リンク 2 に働く慣性モーメント [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
q_1	リンク 1 における一般化座標となる角度 [rad]
q_2	リンク 2 における一般化座標となる角度 [rad]
τ_1	リンク 1 に働く一般化力 (トルク) [Nm]
τ_2	リンク 2 に働く一般化力 (トルク) [Nm]

るため、この問題を直接解くことは難しい。そこで有限次元化して近似解を得ることを考える。文献 [4], [5] に従い、(4) 式で有限の時間範囲のみを考えることにし、最適化問題を凸にするため変数の構造を無視する。その上で得られた最適解を近似するような Q を求める。このとき得られる動的量子化器は近似解であると同時に、有限時間の性能を考えているため準最適解となる。

4 状態変動の評価に基づく動的量子化器

3 章では準最適動的量子化器を導出することで安定な動的量子化器を得ることが出来たが、安定性をより上げるためには次数を大きくしなくてはならないという問題がある。そこで、澤田・新 [6] はある離散時間システムに量子化誤差を入力した時の状態の変動範囲 (可到達集合) が不変集合を用いることにより評価できることに注目し、不変集合解析に基づく動的量子化器の設計方法を提案している。

4.1 状態変動の評価による動的量子化器の設計

図 3 における動的量子化器 Q が図 5 のような構造をもつとする。その時得られるシステムを、静的量子化器の部分と、通常の線形システムの部分に分けて考えると図 6 のように表わすことができる。線形システムの部分は量子化に伴う誤差を外乱として受けていて、動的量子化器が安定な場合その状態は図 7 のように、原点を中心とするある楕円体 γ の中で変動すると考えられる。この変動範囲は LMI を用いて求めることができ、さらにこの γ を使って出力 Z の大きさを評価することができる。

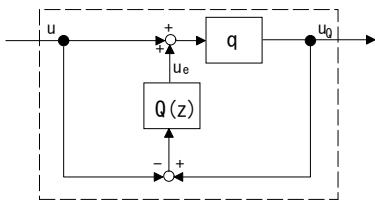


図5 動的量子化器

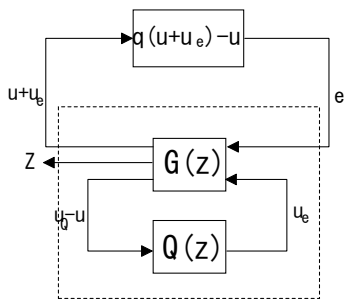


図6 フィードバックシステムと量子化誤差

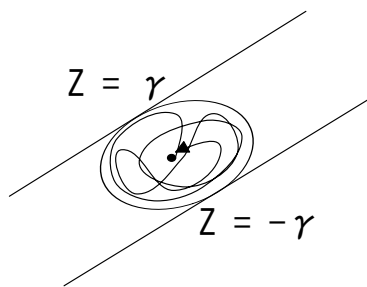


図7 状態の変動範囲

5 数値シミュレーション

サンプリング周期を $T = 0.005$ [s], 量子化サイズを $d = 0.5$ [V] と定め有限時間近似に基づく方法と状態変動範囲の評価に基づく方法それぞれで動的量子化器を設計し数値実験を行ったときの、波形とその数値比較を示す。なお初期状態 $q1 = 0$ [rad] から始まり、3秒後に目標値 $q1 = 0.5236$ [rad] に追従する制御をする。なお制御器は最適サーボシステムにより設計したものをを用いた。

5.1 有限時間近似による動的量子化器

3章に従って動的量子化器を設計し、量子化器の次数を次第に増やして行き、出力誤差の様子を記録した。その結果を表2に示す。またその中で得られた、50次での動的量子化器のシミュレーション結果を図8に示し、その時の入力電圧を図10に示す。図8からも分かるように不安定であった出力は安定化し静的量子化器を実装した場合よりと比べて、連続値制御の場合の出力との差が小さくなった。

しかし、性能の良い動的量子化器を得るためには次数を高くする必要があるが、次数が91を超えるとメモリ不足のため計算が出来なくなった。表2から次数を大きくすれば出力の誤差を小さくすることが出来るが、そのためには大きな次数の動的量子化器を考えなければいけなくなる事が分かる。

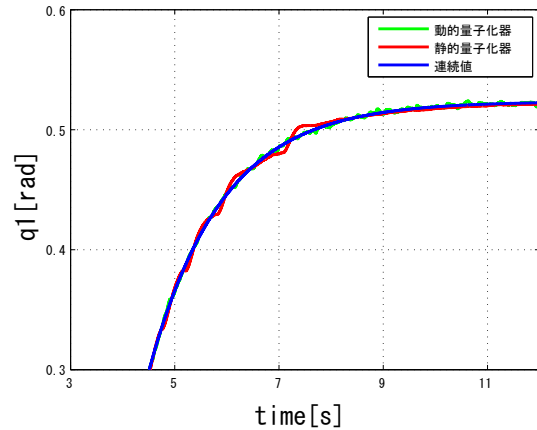


図8 有限時間近似に基づく動的量子化器と静的量子化器の比較

表2 次数と出力誤差

次数	25	35	45	50
出力誤差	0.0063	0.0058	0.0053	0.0039

5.2 状態の変動範囲評価に基づく動的量子化器

量子化誤差を踏まえたシステムの入力 Z の値が最小となるように、パラメータの値を $\alpha = 0.0120$ と定め澤田・新 [6] によるLMIを解くと $\gamma = 9.2983 \times 10^{-7}$ を与える、以下の動的量子化器を得た。

$$A_Q = \begin{bmatrix} 0.7888 & -0.0053 & -0.1636 & -0.0217 & -0.0047 \\ -12.6262 & -0.3076 & -15.7580 & -2.0916 & -1.4020 \\ 0.2168 & 0.0126 & 1.1903 & 0.0302 & 0.0025 \\ 6.8962 & 0.6888 & 8.5707 & 2.1006 & 0.7311 \\ 0.0052 & 0.0000 & 0.0005 & 0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$B_Q = \begin{bmatrix} -0.0003 \\ -0.0809 \\ 0.0001 \\ 0.0422 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$C_Q = [0.9580 \quad 0.0768 \quad 1.0758 \quad 0.1428 \quad -0.0017] \times 10^4, \quad (7)$$

$A_Q + B_Q C_Q$ の固有値は $-0.9938, 0.9682, 0.9630, -0.0994, 0.0000$ となり安定な動的量子化器であることが分かる。またこの手法に基づいて設計した動的量子化器によるシミュレーションを行った結果を図9に示し、その時の入力電圧を図11に示す。図9からも分かるように静的量子化器を実装したシステムより、量子化を考えないシステムの出力に近いことが分かる。

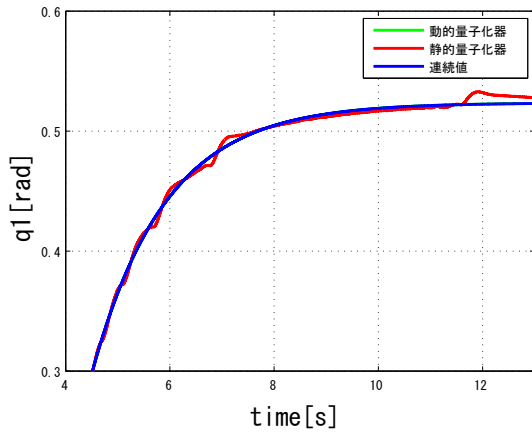


図9 状態の変動範囲評価に基づく方法における動的量子化器と静的量子化器の比較

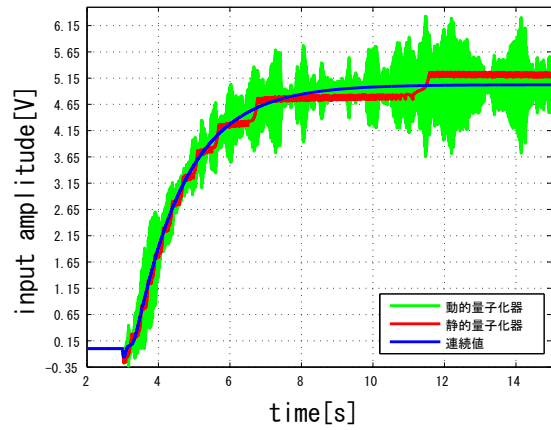


図11 状態変動範囲評価に基づく動的量子化器と静的量子化器の電圧比較

5.3 考察

東・杉江 [4][5] が提案した有限時間近似に基づく方法によって動的量子化器を導出する場合、低次の場合、静的量子化器との違いはあまり見られなかった。より良い動的量子化器を設計するには次数を大きくする必要があり、その場合、求められた動的量子化器は大きな次数をもつため、実験器への実装などの場合に問題点がある。しかし図10のように電圧の誤差が少ないことが良い点であると考えられる。澤田・新 [6] 状態変動範囲の評価に基づく方法による動的量子化器は表3から分かるように静的量子化器を用いた場合の出力とは明らかに違う性能が得られたが、電圧の誤差が大きくなってしまふ時点でコントローラ的设计を考慮しなければならない。

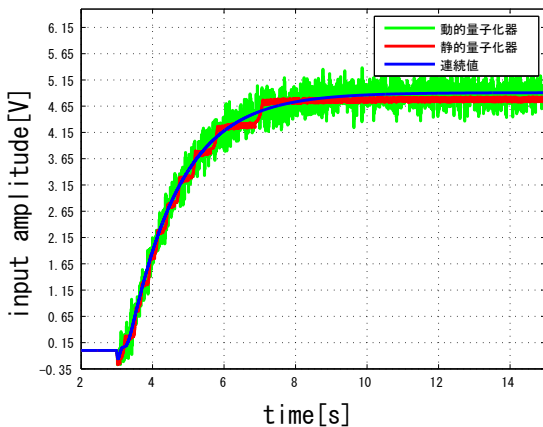


図10 有限近似に基づく動的量子化器と静的量子化器の電圧比較

表3 出力誤差に基づく性能評価

	量子化誤差
静的量子化器	0.0071
動的量子化器 (有限時間近似)	0.0039
動的量子化器 (状態変動範囲)	8.0537×10^{-5}

6 おわりに

本研究において、数値実験ベンダポットという不安定な制御対象に対する動的量子化器の設計を2つの手法で行うことが出来た。今後の課題として動的量子化器の実験機への実装があげられる。

参考文献

- [1] 東俊一, 杉江俊治: 『離散値入力型制御における最適動的量子化器』, システム制御情報学会論文誌, Vol. 20, No.3, pp. 122-129, 2007
- [2] 南裕樹, 東俊一, 杉江俊治: 『離散値入力型フィードバック制御における最適動的量子化器』, 計測自動制御学会論文集, Vol.43, No.3, pp. 227-233, 2007
- [3] 東俊一, 杉江俊治: 『離散値入力フィードバック制御のための動的量子化器』, 計測と制御, Vol.49, No.11, pp. 795-800, 2010
- [4] 東俊一, 杉江俊治: 『離散値入力型制御のための最適動的量子化器の安定性』, 計測自動制御学会論文集, Vol.43, No.12 pp. 1136-1143, 2007
- [5] Shunichi Azuma, Toshiharu Sugie: 『Linear Programming Based Optimal Dynamic Quantizer for Discrete-Valued Input Control』, 第7回制御部門大会資料, pp. 64-3-4, 2007
- [6] 澤田賢治, 新誠一: 『離散値入力型 SISO システムに対する不変集合解析に基づく動的量子化器設計』, システム制御情報学会論文誌, Vol.23, No.11, pp. 249-256, 2010