ジブクレーンに対する吊り荷の質量とロープ長の変動を考慮したロバスト制御

2009SE294 牛田雄基
指導教員：高見勲

1　はじめに

本研究では, ジブクレーンのトロリーの移動とロープの巻き上げの 2 動作を同時に行う．ロープ長と吊り荷の質量の変動に着目し, ロープの巻き上げには吊り荷の質量の変動をポリトープ表現で補償した, ロバスト H_2 制御を行う．また, トロリーの移動にはロープ長の変動を時変パラメータとしてロープの変化速度と加速度を考慮したゲインスケジューリング (GS) 制御系設計を行う．また本研究ではディスクリプタ表現を使い, 変動パラメータを LFT により扱いやすい形で取り出すことで, アフィンな LPV システムを構成する．そしてパラメータ依存リアプノフ関数に基づく GS 制御系設計を目指す.

2　制御対象

本研究で用いるジブクレーンは, ワイヤーの長さ l_p [m] は 0.1 [m] から 0.7 [m] まで変動する．また, 本研究では吊り荷の重さ m_p [kg] は 0.147 [kg] から 0.747 [kg] まで変動し, トロリーは 0.5 [m] 移動する．ただし, ワイヤーの質量は無視でき, 吊り荷は質点であると仮定する．本研究ではトロリーとワイヤーを同時に動かすが, クレーンの制御においては分散制御が有効であるという研究がされている [1] ので, それぞれを異なった制御器を用いて制御する.

3　ペイロードシステム

観測量はロープ長 l_p [m], 制御量は吊り荷の z 座標の位置 z_p [m]．操作量はトロリーモータにかかる電流 I_p [A] とする．一般化座標を $q_p(t) = z_p(t)$ とする．偏差の積分を $e_p(t)$, 目標値を r_p とする．制御量 $z_p(t)$ を目標値に追従させるために状態変数に $e_p(t)$ を追加し, 状態変数を $x_{ep}(t) = [e_p(t) - e_p(\infty) \;\; q_p(t) - q_p(\infty) \;\; \dot{q}_p(t)]^T$ 操作量を $u_{pe}(t) = u_p(t) - u_p(\infty)$ とすることで, 拡大系を構成する．ここで $e_p(\infty)$, $q_p(\infty)$, $u_p(\infty)$ は定常値である．状態フィードバックゲインを K_p として $u_{ep} = K_p x_{ep}$ とする．本研究では吊り荷の質量の変動を考慮する．この変動に対してポリトープ表現を用いてロバスト H_2 制御系を設計する．また LMI で表現するために変数変換をする.

4　ジブシステム

4.1　モデリング

m_t はトロリーの質量, J_ψ はジブモータの等価慣性モーメント, $K_{g,j}$ はジブモータのギア比, $K_{t,j}$ はジブモータのトルク定数, $\eta_{g,j}$ はジブモータのギアボックス効率, $\eta_{m,j}$ はジブモータのギア効率, $r_{j,p}$ はジブモータのギア半径である．観測量はトロリーの位置 $\xi(t)$ [m], 吊り荷の振れ角 $\gamma(t)$ [rad] とする．制御量は吊り荷の y 座標の位置 y_ξ [m]．操作量はジブモータにかかる電流 I_j [A]. 一般化座標を $q(t) = [\xi(t) \;\; \gamma(t)]^T$ とすると, Lagrange の運動方程式は式 (1) で表される.

$$E\ddot{q} + F\dot{q} + Gq = HI_j \tag{1}$$

$$E = \begin{bmatrix} m_p + m_t + \frac{J_\psi (K_{g,j})^2}{r_{j,p}^2} & -m_p l_p \\ -m_p l_p & -m_p l_p^2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -2m_p \dot{l}_p \\ 0 & -2m_p l_p \dot{l}_p \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & -m_p \ddot{l}_p \\ 0 & g m_p l_p \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j}}{r_{j,p}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$E^{-1}F$ には $m_p\dot{l}_p, m_p\ddot{l}_p, m_p l_p^{-1}, \dot{l}_p l_p^{-1}, m_p\dot{l}_p l_p^{-1}, m_p\ddot{l}_p l_p^{-1}$ という非線形項を含んでいる, また $E^{-1}G$ にも変動パラメータが含まれている．そのため, 冗長なディスクリプタ変数を導入してシステムを表す.

4.2　ディスクリプタ表現

偏差の積分を $e(t)$ とし, 拡大系の状態変数を $x_e(t) = [e(t) - e(\infty) \;\; q(t) - q(\infty) \;\; \dot{q}(t)]^T$ とする．また, 操作量を $u_j(t) = u(t) - u(\infty)$ とする．ここで $e(\infty), q(\infty), u(\infty)$ は定常値である．ディスクリプタ変数を $x_d = [x_e \;\; \ddot{q}]^T$ とすることで, ディスクリプタ表現を用いた状態方程式は式 (2) となる.

$$E_d \dot{x}_d = A_d(l_p, \dot{l}_p, \ddot{l}_p, l_p^2, l_p \dot{l}_p) x_d + B_d u_j \tag{2}$$

$$E_d = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & -G & -F & -E \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} -1 & \theta_1 \end{bmatrix}$$

式 (2) では, 変動パラメータを行列 A_d 内に集約することができているが, 変動パラメータの積が存在している．行列 A_d 内の変動パラメータを LFT を用いて扱いやすい形で取り出す.

4.3　線形分数変換

A_n を A_d の変動パラメータを含まない項, Δ' を LFT 形式のスケジューリングパラメータとする, 行列 A_d が

$$A_d = A_n + B_{\delta'} \Delta' (I - D_{\delta'} \Delta')^{-1} C_{\delta'} \tag{3}$$

となるような $B_{\delta'}, C_{\delta'}, D_{\delta'}, \Delta'$ を定めることで, 式 (2) は式 (4) で表される.

$$\begin{aligned} E_d \dot{x}_d &= A_n x_d + B_{\delta'} \omega_{\delta'} + B_d u_j \\ Z_{\delta'} &= C_{\delta'} x_d + D_{\delta'} \omega_{\delta'} \\ \omega_{\delta'} &= \Delta' Z_{\delta'} \end{aligned} \tag{4}$$

式 (4) を元に A_d のスケジューリングパラメータを取り出す．また, パラメータ依存リアプノフ関数を扱うため, スケジューリングパラメータが Δ 内にのみ存在するように変換する．m_p は時変ではないが変動パラメータである．まず m_p を分離する．$A_{n'}$ を A_d の m_p を含まない項, mp に対する LFT 形式のスケジューリングパラメータ $\Delta_{m'}$ を diag $(m_p \; m_p)$, とする．このとき $A_d = A_{n'} + B_{\delta'} \Delta_m C_{\delta'}$

となる $B_{\delta'}, C_{\delta'}$ を定めることで A_d は式 (5) で表すことができる.

$$A_d = \begin{bmatrix} A_n & B_{\delta'}\Delta_m \\ C_{\delta'} & -I \end{bmatrix} \tag{5}$$

式 (5) は m_p について線形である. さらに $l_p, \dot{l}_p, \ddot{l}_p$, に対する LFT を行うことで $m_p, l_p, \dot{l}_p, \ddot{l}_p$ について線形となる. 新たにディスクリプタ変数を $\tilde{x}_d = [x_d \quad Z_\delta]^T$ と与えることで, LFT を行ったディスクリプタ表現を用いた状態方程式は式 (6) となる.

$$\tilde{E}_d \dot{\tilde{x}}_d = \tilde{A}_d(l_p, \dot{l}_p, \ddot{l}_p)\tilde{x}_d + \tilde{B}_d u_j \tag{6}$$

$$\tilde{A}_d = \begin{bmatrix} A_n & B_\delta \Delta \\ C_\delta & D_\delta \Delta - I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n11} & A_{n12} & B_{\delta 1}\Delta \\ A_{n21} & A_{n22} & B_{\delta 2}\Delta \\ C_{\delta 1} & C_{\delta 2} & D_\delta \Delta - I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{E}_d = \begin{bmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = diag\left(m_p \; m_p \; l_p \; l_p \; l_p \; \dot{l}_p \; \ddot{l}_p \; l_p \; l_p \; l_p \; l_p\right)$$

パラメータ依存リアプノフ関数を扱うため $\dddot{l}_p$ を含むスケジューリングパラメータ $l_p, \dot{l}_p, \ddot{l}_p, \dddot{l}_p$ の上下界を頂点とするパラメータボックスを式 (7), で与える.

$$\Theta = \{\theta = [\theta_1, \; \theta_2, \; \theta_3, \; \theta_4]^T : \theta_i \in \{\underline{\theta}_i, \; \overline{\theta}_i\}\} \tag{7}$$

$$\theta_1 = l_p, \theta_2 = \dot{l}_p, \theta_3 = \ddot{l}_p, \theta_4 = \dddot{l}_p \; (i = 1, 2, 3, 4)$$

4.4 LMI 定式化

状態フィードバックゲインを $\tilde{K}_d(\theta)$ とし, $u_j = \tilde{K}_d(\theta)\tilde{x}_d$ とする. $z(t)$ を評価出力, $\omega(t)$ をインパルス外部入力, Q を拡大系の状態変数に対する重み行列, R は入力に対する重み, ディスクリプタ表現の枠組みにおける LPV システム, 式 (8) を考える.

$$\tilde{E}_d \dot{\tilde{x}}_d(t) = \tilde{A}_{d2}(\theta)\tilde{x}_d + \tilde{B}_{d\omega}\omega(t) \tag{8}$$

$$z(t) = \tilde{C}_{d2}\tilde{x}_d(t)$$

$$\tilde{B}_{d\omega} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{d2} = \tilde{A}_d + \tilde{B}_d \tilde{K}_d(\theta), \tilde{C}_{d2} = \tilde{C}_d + \tilde{D}_d \tilde{K}_d(\theta)$$

$$\tilde{C}_d = [\; W_x \quad 0 \quad 0 \;], W_x = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{D}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

H_2 ノルム上界値 γ_2^2 を準最小化し, システムが漸近安定であるための条件は式 (9), (10), (11), (12) となる.

$$\tilde{E}_d \tilde{P}_d(\theta) = (\tilde{E}_d \tilde{P}_d(\theta))^T \geq 0 \tag{9}$$

$$\tilde{A}_{d2}(\theta)^T \tilde{P}_d(\theta) + \tilde{P}_d(\theta)^T \tilde{A}_{d2}(\theta) + \tilde{E}_d \dot{\tilde{P}}_d(\theta) + \tilde{C}_{d2}^T \tilde{C}_{d2} < 0 \tag{10}$$

$$\| z(t) \|_2^2 < \omega_0^T \tilde{B}_{d\omega}^T \tilde{P}_d(0) \tilde{B}_{d\omega}\omega_0 < W \tag{11}$$

$$trace(W) < \gamma_2^2 \tag{12}$$

$\tilde{X}_d(\theta) = \tilde{P}_d(\theta)^{-1}$ とする. 式 (10),(11) に対してシュールの補題を用いる. また, 式 (10) に対しては $\tilde{Y}_d(\theta) = \tilde{K}_d(\theta)\tilde{X}_d(\theta)$ で変数変換をする.

$$\begin{bmatrix} He\{\tilde{A}_d(\theta)\tilde{X}_d(\theta) + \tilde{B}_d \tilde{Y}_d(\theta)\} - \tilde{E}_d \dot{\tilde{X}}_d(\theta) & \tilde{Y}_d(\theta)^T \tilde{D}_d^T + \tilde{X}_d(\theta)^T \tilde{C}_d^T \\ \tilde{C}_d \tilde{X}_d(\theta) + \tilde{D}_d \tilde{Y}_d(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} W & \tilde{B}_{d\omega}^T \\ \tilde{B}_{d\omega} & \tilde{X}_d(\theta) \end{bmatrix} > 0 \tag{14}$$

ここで, 行列 $\tilde{E}_d$ の構造を考慮してリアプノフ行列 $\tilde{X}_d(\theta)$ と変換行列 $\tilde{Y}_d(\theta)$ を

$$\tilde{X}_d(\theta) = \begin{bmatrix} X(\theta) & 0 & 0 \\ X_{21}(\theta) & X_{22}(\theta) & X_{23}(\theta) \\ X_{31}(\theta) & X_{32}(\theta) & X_{33}(\theta) \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\tilde{Y}_d(\theta) = [\; Y(\theta) \quad 0 \quad 0 \;] \tag{16}$$

と与えることで, 式 (9), (11) は

$$X(\theta) > 0 \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} W & B_\omega^T \\ B_\omega & X(\theta) \end{bmatrix} > 0 \tag{18}$$

とすることができる. また, 状態フィードバックゲイン $\tilde{K}_d(\theta)$ は

$$\tilde{K}_d(\theta) = [\; K(\theta) \quad 0 \quad 0 \;] \tag{19}$$

となる. $\tilde{A}_d$ はスケジューリングパラメータに対してアフィンであるので, リアプノフ行列 $\tilde{X}_d$ と変換行列 $\tilde{Y}_d$ もアフィンである. 式 (20)-(25) という制約を与える.

$$X(\theta) = X_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \theta_3 X_3 \tag{20}$$

$$\tilde{X}_d(\theta) = \tilde{X}_{d0} + \theta_1 \tilde{X}_{d1} + \theta_2 \tilde{X}_{d2} + \theta_3 \tilde{X}_{d3} \tag{21}$$

$$Y(\theta) = Y_0 + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Y_2 + \theta_3 Y_3 \tag{22}$$

$$\tilde{Y}_d(\theta) = \tilde{Y}_{d0} + \theta_1 \tilde{Y}_{d1} + \theta_2 \tilde{Y}_{d2} + \theta_3 \tilde{Y}_{d3} \tag{23}$$

$$\dot{\tilde{X}}_d(\theta) = \tilde{X}_d(\dot{\theta}) - \dot{X}_{d0} \tag{24}$$

$$\tilde{E}_d \dot{\tilde{X}}_d(\theta) = \begin{bmatrix} X(\dot{\theta}) - X_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

スケジューリングパラメータに対してアフィンである行列はパラメータボックスを頂点とした端点行列 Θ で表現できる. しかし, このままでも式 (13) は $\tilde{A}_d(\theta)\tilde{X}_d(\theta)$ を含み LMI で解くことが出来ないが, これは

$$\tilde{A}_d(\theta)\tilde{X}_d(\theta) = \begin{bmatrix} A_{n11} & A_{n12} & B_{\delta 1}\Delta \\ A_{n21} & A_{n22} & B_{\delta 2}\Delta \\ C_{\delta 1} & C_{\delta 2} & D_\delta \Delta - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11}(\theta) & 0 & 0 \\ X_{21}(\theta) & X_{22}(\theta) & X_{23}(\theta) \\ X_{31}(\theta) & X_{32}(\theta) & X_{33}(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_i [\; X_{31,i} \quad X_{32,i} \quad X_{33,i} \;] = 0, \; (i = 1, 2, 3)$$

という制約を与えることで式 (13) は LMI で解くことができる. また, 吊り荷の質量 m_p の変動をポリトープ表現を用いて補償する. m_p が最小値のときの $\tilde{A}_d$ を $\tilde{A}_{d,m1}$, m_p が最大値のときの $\tilde{A}_d$ を $\tilde{A}_{d,m2}$ としてこの 2 つの場合を安定化する. 式 (12), (13), (17), (18) を解くことで, GS コントローラは式 (26) で与えられる.

$$\tilde{K}_d(\theta) = [\; Y(\theta)X(\theta)^{-1} \quad 0 \quad 0 \;] \tag{26}$$

5 おわりに

本研究では, ロープ長と吊り荷の質量が変動するジブクレーンに対してディスクリプタ表現と LFT を用いることで, ロープ長の変動には GS 制御, 吊り荷の質量の変動にはロバスト H_2 制御の定式化を行った. またパラメータ依存リアプノフ関数に基づく GS 制御系設計を行った. 本研究で定式化した理論の有効性を示すためにシミュレーションと実験が必要になる. しかしパラメータ依存リアプノフ関数に基づく GS 制御は, $X(\theta)^{-1}$ を実装するのが困難であるので, $X(\theta)^{-1}$ の扱いを工夫していくことが今後の課題である.

参考文献

[1] 高木清志, 西村秀和, タワークレーンの起伏・旋回方向の分散制御, 日本機械学会論文集, C 編, vol. 65, (1999), No. 640, P 4692-4699