一階非ホロノミック拘束を持つControl Moment Gyroscopeの非線形追従制御

2009SE299 鷲津翔太

指導教員：高見　勲

1　はじめに

本研究で扱う Control Moment Gyroscope(以下 CMG) は 2 入力 4 状態の劣駆動システムである． CMG には Rotor を回転させるモータと, 同軸上の Gimbal を傾けさせるモータが存在し, ジャイロ効果により駆動力のない他の Gimbal を動かす角運動量, トルクを発生する装置である．このような劣駆動システムは, 平衡点における線形近似システムが可制御でない, 非ホロノミック拘束を受けることが知られている．そこで, 本研究では, Backstepping 手法を用いた非線形制御により, 駆動力のない Gimbal を目標軌道に追従させる制御系設計を考える．

2　数学モデル

図 1 は,CMG の概略図である．本研究では Gimbal4 をロックした場合, つまり Gimbal4 の角度 $q_4(t)$ と角速度 $\omega_4(t)$ について, $q_4(t)=\omega_4(t)=0$ となる状態を考える．CMG には Rotor1 を回転させるトルク $T_1(t)$ と Gimbal2 を回転させるトルク $T_2(t)$ が存在する．$q_1(t)$ は Gimbal2 からみた Rotor1 の相対角度を表し,$\omega_1(t)$ は Rotor1 の角速度である．$q_2(t)$ は Gimbal3 からみた Gimbal2 の相対角度を表し, 角速度は $\omega_2(t)$ である．$q_3(t)$ は Gimbal3 の角度を表し, 角速度を $\omega_3(t)$ とする．このとき, CMG の Euler-Lagrange 方程式は (1), (2), (3) となる．

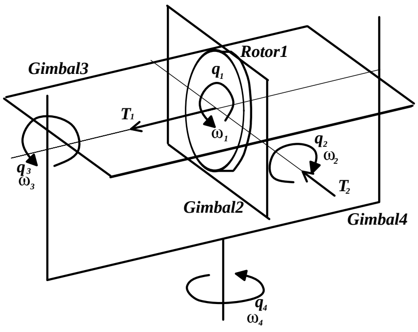

図 1 Schematic representation CMG

$$J_D\dot{\omega_1}+J_D\dot{\omega_3}\cos q_2-J_D\omega_2\omega_3\sin q_2=T_1 \tag{1}$$

$$(I_C+I_D)\dot{\omega_2}+J_1\omega_3^2\sin q_2\cos q_2+J_D\omega_1\omega_3\sin q_2=T_2 \tag{2}$$

$$(J_2-J_1\sin^2 q_2)\dot{\omega_3}+J_D\dot{\omega_1}\cos q_2-J_D\omega_1\omega_2\sin q_2 \\ -J_1\omega_2\omega_3\sin 2q_2=0 \tag{3}$$

ただし, 各パラメータは以下のように定義する．

I_D, J_D: Rotor1 の慣性モーメント [kg・m^2]

I_C, J_C, K_C: Gimbal2 の慣性モーメント [kg・m^2]

J_B: Gimbal3 の慣性モーメント [kg・m^2]

$J_1=J_C+J_D-K_C-I_D$, $J_2=J_B+J_C+J_D$

ここで, Gimbal3 が初期状態において静止している場合, 式 (3) から得られる拘束条件は次式となる．

$$(J_2-J_1\sin^2 q_2)\omega_3+J_D\omega_1\cos q_2=0 \tag{4}$$

式 (4) には, Rotor1 の角速度 ω_1 と Gimbal3 の角速度 ω_3 が含まれている．このようなシステムは一階非ホロノミックシステムと呼ばれ, 平衡点における線形近似系が可制御でなく, 時不変な状態フィードバックを用いて安定化できない．そこで, 非ホロノミックシステムの正準系として知られる Chained system に変換し, 時変コントローラを用いて CMG の安定化を図る．システムの状態変数を $x=[x_1\ x_2\ x_{3c}]^T$, 入力を $u=[u_1\ u_2]^T$ とすると, Chained system は次のようになる．

$$\begin{cases} \dot{x_1}=u_1 \\ \dot{x_2}=u_2 \\ \dot{x_{3c}}=x_2u_1 \end{cases} \tag{5}$$

ただし, q_2 には次のような拘束があり, また変数は以下で定義される．

$$-\frac{\pi}{2}<q_2<\frac{\pi}{2} \tag{6}$$

$$\begin{cases} x_1=q_1 \\ x_2=\alpha(q_2) \\ x_{3c}=q_3 \end{cases} \begin{cases} u_1=\omega_1 \\ u_2=\beta(q_2)\omega_2 \end{cases} \tag{7}$$

$$\alpha(q_2)=\frac{-J_D\cos q_2}{J_2-J_1\sin^2 q_2},\ \beta(q_2)=\frac{d}{dq_2}\alpha(q_2) \tag{8}$$

本研究を行うにあたり, 参考にした文献 [1] では, Gimbal3 の応答が指令軌道を満足しなかった．Gimbal2 の角加速度 $\dot{\omega_2}$ は q_2 と q_3 それぞれの偏差に従属しており, その結果, q_2 が変動することにより, $\dot{\omega_2}$ と q_3 が変動する．よって,q_3 の偏差が十分大きいとき, q_2 は $\frac{\pi}{2}$ となり, 制御ができない．そのため, q_2 の指令軌道を固定して制御をおこなっていた．その場合, Rotor1 の回転を大きくする必要があり, トルク T_1 が大きくなってしまう．本研究ではこの問題を防ぐために, $\dot{\omega_2}$ を q_2 にのみ従属させ, $\dot{\omega_3}$ のみの変動により q_3 の偏差が定まるようし, q_2 を変動させ, より T_1 を抑える制御を考える．そのために Chained system について座標変換 $x_3=x_{3c}-x_2x_1$ を施すと, Chained system は次のように変形できる．

$$\begin{cases} \dot{x_1}=u_1 \\ \dot{x_2}=u_2 \\ \dot{x_3}=-x_1u_2 \end{cases} \tag{9}$$

このシステムを用いて制御系設計をおこなう．

3　制御系設計

得られた Chained system について, 追従制御を考える．指令軌道 $x_r=[x_{1r}\ x_{2r}\ x_{3r}]^T$ は Chained system

$$\begin{cases} \dot{x_{1r}}=u_{1r} \\ \dot{x_{2r}}=u_{2r} \\ \dot{x_{3r}}=-x_{1r}u_{2r} \end{cases} \tag{10}$$

を満足し, また軌道偏差を $x_e=[x_{1e}\ x_{2e}\ x_{3e}]^T$ とし, 軌道偏差は次の式を満足する．

$$x_{ie}=x_i-x_{ir} \tag{11}$$

軌道偏差のダイナミクスは式 (9), (10), (11) を用いて次のように表される.

$$\begin{cases} \dot{x}_{1e} = u_1 - u_{1r} \\ \dot{x}_{2e} = u_2 - u_{2r} \\ \dot{x}_{3e} = -x_1(u_2 - u_{2r}) - x_{1e}u_{2r} \end{cases} \tag{12}$$

この制御系に対し, Backstepping 変換手法に基づく制御系設計を行う. Subsystem Δ_1, Δ_2 を

$$\Delta_1 : \begin{cases} \dot{x}_{3e} = -x_1(u_2 - u_{2r}) - x_{1e}u_{2r} \\ \dot{x}_{1e} = u_1 - u_{1r} \end{cases} \tag{13}$$

$$\Delta_2 : \dot{x}_{2e} = u_2 - u_{2r} \tag{14}$$

とし, それぞれの Subsystem Δ_1, Δ_2 を安定化する入力を設計する. はじめに, Δ_2 について, 状態フィードバックゲイン $k_2 > 0$ を用いて $\dot{x}_{2e}$ を安定化させる.

$$\dot{x}_{2e} = u_2 - u_{2r} = -k_2 x_{2e} \tag{15}$$

この状態フィードバックにより, $\dot{x}_{2e} \to 0$ において, $u_2 - u_{2r} \to 0$ が保証されるので, Δ_1 は次のようになる.

$$\Delta_1 : \begin{cases} \dot{x}_{3e} = -x_{1e}u_{2r} \\ \dot{x}_{1e} = u_1 - u_{1r} \end{cases} \tag{16}$$

この状態から, 残りの入力 u_1 を用いて $x_{1e} = 0, x_{3e} = 0$ となるような制御を考える. その結果, Δ_1 を安定化する入力 u_1 は次式となる.

$$u_1 = u_{1r} - L_1 x_{1e} - L_3 x_{3e} \tag{17}$$

ただし,

$$L_1 = k_1 + k_3 u_{2r}^2,\ L_3 = -k_3 \dot{u}_{2r} - k_1 k_3 u_{2r}$$
$$(k_1 > 0,\ k_3 > 0) \tag{18}$$

以上, 得られた入力を用いて, CMG の入力トルク T_1, T_2 を導出する. Rotor1, Gimbal2 の角加速度は次式となる.

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 = &-G_1(u_1 - u_{1r} + L_1 x_{1e} + L_3 x_{3e}) \\ &+\dot{u}_{1r} - \dot{L}_1 x_{1r} - L_1(u_1 - u_{1r}) \\ &-\dot{L}_3 x_{3e} - L_3(-x_1 u_2 + x_{1d} u_{2r}) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_2 = &\frac{1}{\beta(q_2)}(-G_2(u_2 - u_{2r} + k_2 x_{2e}) \\ &-\dot{\beta(q_2)}\omega_2 + \dot{u}_{2r} - k_2(u_2 - u_{2r})) \end{aligned} \tag{20}$$

また, 角加速度 $\dot{\omega}_3$ は式 (3) より, 次式で与えられる.

$$\dot{\omega}_3 = \frac{-J_D\dot{\omega}_1 \cos q_2 + J_D\omega_1\omega_2 \sin q_2 + J_1\omega_2\omega_3 \sin 2q_2}{J_2 - J_1 \sin^2 q_2} \tag{21}$$

式 (19), (20), (21) を (1), (2) に代入することで CMG のトルク T_1, T_2 は求まる.

4 シミュレーションと実験

設計した制御系を用いてシミュレーションを行い, その結果を基に実験をおこなう.

$$x(0) = [\ 0\ \ -\frac{\pi}{4}\ \ 0\ \ 0\ ]^T \tag{22}$$

とし, 指令軌道 q_{2r}, q_{3r} を次式のように与える.

$$\begin{cases} q_{2r} = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{\pi}{4} \\ q_{3r} = \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases} \tag{23}$$

指令軌道 q_{1r} は次式の数値積分によって生成される.

$$\dot{q}_{1r} = \frac{-J_2 + J_1 \sin^2 q_{2r}}{J_D \cos q_{2r}} \dot{q}_{3r} \tag{24}$$

また, ゲインチューニングを次のようにする.

$$\begin{cases} k_1 = 8,\ k_2 = 10,\ k_3 = 1 \\ G_1 = 0.1,\ G_2 = 10 \end{cases} \tag{25}$$

実験結果を次の図 2, 3, 4 に示す. 点線が指令軌道, 実線が実際の応答である.

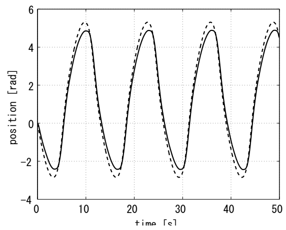

図 2 Response of Rotor1

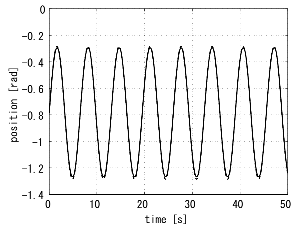

図 3 Response of Gimbal2

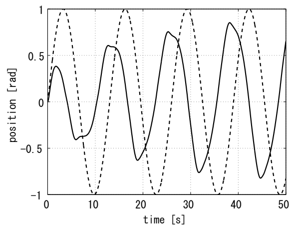

図 4 Response of Gimbal3

q_1 の応答は指令軌道に対し, 小さな誤差がみられるが, 概ね指令軌道に追従しているといえる. q_2 は指令軌道に偏差なく追従しているといえる. しかし, q_3 は, 指令軌道と応答に大きな差があることがわかる. トルク T_1, T_2 の結果を次に示す.

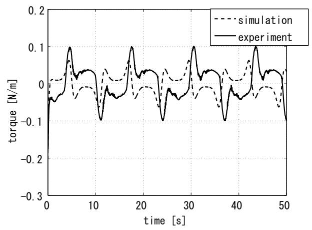

図 5 Response of Torque T_1

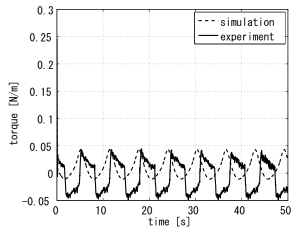

図 6 Response of Torque T_2

トルクの制限は $-0.67 \le T_1 \le 0.67$, $-2.4 \le T_2 \le 2.4$ であり, 制限内に抑えられていることがわかる.

5 考察

本研究の成果は次の点である.

1. 駆動源のない Gimbal3 を Rotor1, Gimbal2 を使って指令軌道に追従させる課題に対し, Chained system を用いて制御系設計を行った.
2. 設計した制御系を用いて, シミュレーションと実験結果の比較を行った.

これまでの研究では, 良好な実験結果を得ることができなかった. 特に, Gimbal3 については立ち上がりの応答から周期がずれており, その後も周期がずれたままの軌道となっている. 今後は, 各 Gimbal のシミュレーション結果との差が生まれる原因を探し, 応答の改善をしていきたい.

参考文献

[1] 太田清士郎: 一階非ホロノミック拘束を持つ Control Moment Gyro の非線形制御, 南山大学 数理情報学部 情報システム数理学科卒業論文, 2011