確率微分方程式の数値シミュレーション

2009SE322 吉田太郎
指導教員：小藤俊幸

1　はじめに

確率微分方程式は，通常の微分方程式に確率論的な揺動が加わったような方程式である．1942 年，三重県員弁郡北勢町（現・いなべ市）出身の数学者伊藤清によって考案された [3]．そのアイデアは，気体や液体中の微粒子の不規則な運動であるブラウン運動がもとになっている．このブラウン運動は現在, 株の動きについても参考にもなっている．今回の実験で確率微分方程式ついて理解していこうと思う．

2　ブラウン運動のシミュレーション

ブラウン運動は，1827 年，英国の植物学者ブラウン (Robert Brown) が顕微鏡で水中の花粉を観察中に発見した．当初は，生き物の動きという見方もあったようであるが（ブラウン自身は，そのように考えていた節がある），1860 年代には，水の分子の衝突によって引き起こされるという考え方が主流となり，1905 年，アインシュタイン (Albert Einstein) によって，いわゆるブラウン運動の理論が構築された．さらに，アインシュタインの理論は，1908 年にフランスの物理学者ペラン (Jean Perrin) によって，実験的に検証された．以上は，参考文献 [5] からの抜粋である（[2] も参照）．

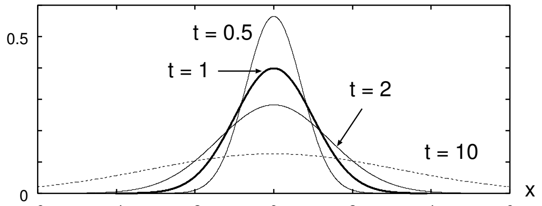

図 1　関数 $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$

ペランの実験から，微粒子の t 時間 $(t > 0)$ の (ある方向に関する) 変位，すなわち，t 時間後の位置のもとの位置からの差は，平均が 0，分散が t の定数倍の正規分布（図 1 参照）に従うことが見出された．このことに基づき，ブラウン運動のシミュレーションを以下のように行う．

簡単のため，空間 1 次元で考える．Δt を十分小さい正数とし，$t_n = n\Delta t$ $(n = 0,\ 1,\ \dots)$ とおく．さらに，ξ_n $(n = 0,\ 1,\ \dots)$ を標準正規分布 (平均 0, 分散 1 の正規分布) に従う乱数とし，

$$W_0 = 0,\quad W_{n+1} = W_n + \sqrt{\Delta t}\,\xi_n \tag{1}$$

により，($t = 0$ で) 原点から出発する “ブラウン粒子” の時刻 $t = t_n$ における位置を定める．このとき，正規分布の基本的性質により，$\sqrt{\Delta t}\,\xi_n$ は，平均 0, 分散 Δt の正規分布に従い，さらに，W_n は平均 0，分散 $n\Delta t = t_n$ の正規分布に従うことから，上記のブラウン運動の性質を計算機シミュレーションで実現することができる．

3　ボックス・マーラー法

実際に，ブラウン運動のシミュレーションを行うためには，標準正規分布に従う乱数を生成する必要がある．これには，いくつかの方法があり，標準的な方法の一つに，ボックス・マーラー (Box-Muller) 法と呼ばれる方法がある．ここでは，この方法について述べる．

ボックス・マーラー法の原理は次のようなものである．X, Y を区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う独立な確率変数とするとき，

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{-2\log X}\,\cos(2\pi Y) \\ V &= \sqrt{-2\log X}\,\sin(2\pi Y) \end{aligned} \tag{2}$$

は，それぞれ，標準正規分布に従う独立な確率変数となる．

実際，実数 u, v に対して，$R_2 = [0,1]\times[0,1]$ 内の領域 $S_1(u)$，$S_2(v)$ を

$$\begin{aligned} S_1(u) &= \{(x,\ y) \in R_2 \,:\, (-2\log x)^{1/2}\cos(2\pi y) \le u\} \\ S_2(v) &= \{(x,\ y) \in R_2 \,:\, (-2\log x)^{1/2}\sin(2\pi y) \le v\} \end{aligned}$$

のように定義すると，

$$\mathrm{area}[S_1(u)] = \Phi(u),\quad \mathrm{area}[S_2(v)] = \Phi(v) \tag{3}$$

$$\mathrm{area}\Big[S_1(u)\bigcap S_2(v)\Big] = \mathrm{area}[S_1(u)]\,\mathrm{area}[S_2(v)] \tag{4}$$

が成り立つ．ただし，$\mathrm{area}[\,\cdot\,]$ は領域の面積，Φ は標準正規分布の分布関数

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\xi^2/2}d\xi$$

を表す．

4　オイラー・丸山スキーム

微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x)\ (t \ge t_0),\quad x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

を考える．簡単のため，未知変数 x は実数値関数，すなわち，微分方程式は単独方程式とする．

微分方程式の初期値問題の最も基本的な解法は，オイラー法である．$x(t_n)$ の近似値 x_n とするとき，オイラー法は，

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f(t_n,\ x_n) \tag{6}$$

と表される．

また，W_n を (1) およびボックス・マーラー法で計算される乱数列（図 2 参照）とするとき．この“ 微分 ”

$$\frac{W_{n+1}-W_n}{\Delta t} = \frac{\xi_n}{\sqrt{\Delta t}} \tag{7}$$

は，ホワイトノイズ（周波数に偏りのないノイズ）の数学モデルと考えることができる（図 3 ）.

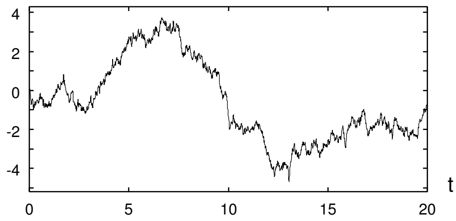

図 2 ブラウン運動の例 (見本経路)

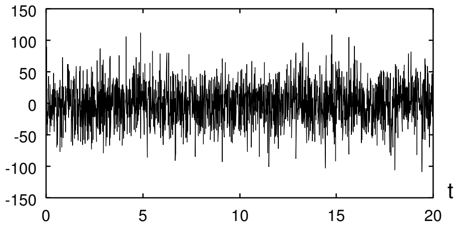

図 3 “ホワイト・ノイズ”

さらに，$g(t,x)$ を t, x の関数として，オイラー法 (6) にノイズの加わった

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t} = f(t_n, x_n) + g(t_n, x_n)\,\frac{W_{n+1}-W_n}{\Delta t} \tag{8}$$

の式，すなわち，

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)\,\Delta t + g(t_n, x_n)\,\sqrt{\Delta t}\,\xi_n \tag{9}$$

を考える．オイラー法 (6) による近似値（を折れ線でつないだもの）は $\Delta t \to 0$ のとき，微分方程式 (5) の解に近づく．同様に，(9) も $\Delta t \to 0$ のとき，何らかの方程式の解に近づくことが期待される．そのような観点から考案された方程式が，確率微分方程式であり，

$$dX(t) = f\bigl(t, X(t)\bigr)dt + g\bigl(t, X(t)\bigr)dW(t) \tag{10}$$

のような記号で表される．ここで，$W(t)$ はウィナー過程と呼ばれるブラウン運動の数学モデル（確率過程）である．オイラー法の類似 (9) を，確率微分方程式の近似公式と解釈して，オイラー・丸山スキームと呼ぶ（例えば，[4]）.

5 数値シミュレーション

$$dX(t) = [X(1-X^2) + a\cos(\omega t)] + \sigma dW(t) \tag{11}$$

ここで，変数 $X(t)$ は，地球の気温を表し，$X=-1$ が氷期の気温，$X=1$ が間氷期の気温に対応する．

パラメータ a,ω を $a=0.11, \omega=2\pi/6000$ に固定し，σ を

$$\sigma = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$$

のように変化させたとき解の様子がどのように変わるかを，t の範囲を $0 \le t \le 30000$ にとって，数値実験を行った．結果を図4 に示す．この下の図を見ると $\sigma=0.3$ のときに周期的な温度変化が見られた．時間の区間の分割数や乱数を変えても同様な結果が見られた．

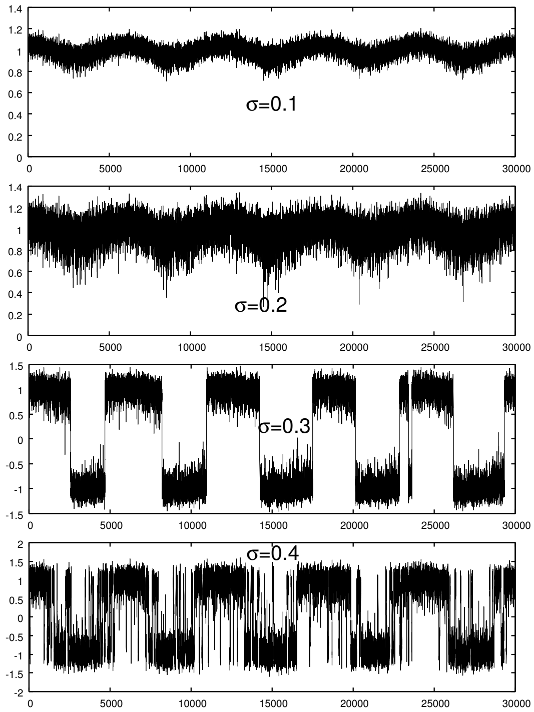

図 4 数値計算結果

6 おわりに

今回の実験を通して確率微分方程式がどのようなものかをおおよそ把握することができた．特に確率共鳴がおこるという事実もわかり自分の目標がしっかり達成できたので今回の実験にはすごく満足している．

参考文献

[1] R. Benzi, G. Parisei, A. Sutera, A. Vulpiani, A theory of stochastic resonance in climate change, SIAM J. Appl. Math. **43** (1983), pp. 565–578.

[2] 江沢 洋：『だれが原子をみたか』，岩波書店，東京，1976.

[3] 伊藤清，Markoff 過程を定める微分方程式，全国紙上数学談話会誌 1077 (1942), pp. 1352–1400.

[4] 三井斌友，小藤俊幸，齊藤善弘：『微分方程式による計算科学入門』，共立出版，東京，2004.

[5] 米沢富美子：『ブラウン運動』，物理学 One Point 27，共立出版，東京，1986.