

# 支点が上下する倒立振り子の安定性解析

2009SE324 吉岡利展

指導教員：小藤俊幸

## 1 はじめに

高塚 [3] は、支点が上下する倒立振り子の安定性を、数学的手法と数値解析と合わせた方法により調べている。具体的には、倒立振り子の方程式を線形化し、得られた線形非自励系方程式の安定性を

(方法 1) 直接、ルンゲ・クッタ法で解を求めて調べる

(方法 2) 力学系理論の手法 [1] を用いて、行列の固有値問題に帰着して調べる

の二通りの方法で調べている。ただし、(方法 2) でも、行列を求める際にルンゲ・クッタ法 (近似計算) を使っている。(方法 1) と (方法 2) による結果は、おおむね一致したが、(方法 2) では安定であると判定された方程式が、(方法 1) では不安定であると判定される食い違いも見られた。理論的には、両者の判定は一致するはずである。本研究の目的は、この食い違いが生じた原因を調べ、より確かな安定性の判定を行うことである。

## 2 運動方程式

支点が上下する倒立振り子の運動方程式は、垂直下向きからの角度を  $\theta$  として、以下のように表される [4]。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g + \eta''(t)}{l_0} \sin \theta \quad (1)$$

ここで、 $g$  は重力加速度 ( $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  とする)、 $l_0$  は振り子の棒の長さである。支点が垂直方向に基準の位置から  $y = \eta(t)$  のように上下すると考えている。

$\varphi(t) = \pi - \theta(t)$  と変数変換すると、 $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ 、 $\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \sin \varphi$  より、(1) は

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g + \eta''(t)}{l_0} \sin \varphi \quad (2)$$

と書き直される。さらに、 $\sin \varphi \approx \varphi$  と近似すると、線形非自励系の方程式

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g + \eta''(t)}{l_0} \varphi \quad (3)$$

が得られる。 $x(t) = \varphi(t)$ 、 $y(t) = \varphi'(t)$ 、 $q(t) = \frac{g + \eta''(t)}{l_0}$  とおくと、(3) は

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = q(t)x \quad (4)$$

のように 1 階化される。

## 3 ルンゲ・クッタ法

ここでは、常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (t_0 \leq t \leq t_F), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5)$$

に関する代表的な数値解法であるルンゲ・クッタ法 [2] について述べる。未知変数  $x(t)$  は  $R^d$  に値をとる関数、 $f$  は  $[t_0, t_F] \times R^d$  から  $R^d$  への関数 (写像) である。区間  $[t_0, t_F]$  を小区間に分割し独立変数の離散点を

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = t_F$$

のようにとる。 $t_n$  をステップ点、間隔  $h_n = t_{n+1} - t_n$  をステップ幅と言う。不等間隔のステップ点がいられる場合もあるが、ここでは、等間隔のステップ幅  $h = (t_F - t_0)/N$  を考える。初期値問題の解  $x(t)$  について第  $n$  ステップ点における値  $x(t_n)$  の近似値を  $x_n$  とするとき近似値  $x_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) を何らかの構造的な手段により求める方法を一般に離散変数法 (discrete variable method) と言う。最も簡単な離散変数法はオイラー法 (Euler method)

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \quad (6)$$

である。与えられた初期値  $x_0$  から漸化式 (6) を用いて順次  $x_1, x_2, \dots$  が計算される。オイラー法は理論的には重要であるが近似精度が低いため計算の効率が悪い。実用的な計算ではルンゲ・クッタ法 (Runge Kutta method) と呼ばれる解法が使われることが多い。標準的なルンゲ・クッタ法 (古典的ルンゲ・クッタ法と呼ばれる) では次のように 4 回の関数計算を行って  $x_n$  から  $x_{n+1}$  を求める。

$$k_1 = f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1) \quad (7)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6} \quad (8)$$

## 4 平衡解の安定性解析

関数  $\eta''(t)$  の周期を  $\tau$  とする。ベクトル  $[\xi, \eta]^T \in R^2$  に対して、初期条件  $x(0) = \xi$ 、 $y(0) = \eta$  をみたす (4) の解を  $x(t)$ 、 $y(t)$  とし、 $[\xi, \eta]^T$  に  $[x(\tau), y(\tau)]^T$  を対応させる  $R^2$  から  $R^2$  への写像を  $F$  とする。 $F$  は線形写像となる。実際、 $v_1 = [\xi_1, \eta_1]^T$ 、 $v_2 = [\xi_2, \eta_2]^T$  に対して、 $x(0) = \xi_1$ 、 $y(0) = \eta_1$  をみたす (4) の解を  $x_1(t)$ 、 $y_1(t)$  とし、 $x(0) = \xi_2$ 、 $y(0) = \eta_2$  をみたす (4) の解を  $x_2(t)$ 、 $y_2(t)$  とすると、定数  $c_1$ 、 $c_2$  に対して、 $x(0) = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ 、 $y(0) = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2$  をみたす解は  $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ 、 $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  と表される。したがって、

$$F(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 F(v_1) + c_2 F(v_2) \quad (9)$$

が成り立つ。すなわち、 $F$  は線形写像である。

$F$  による  $[1, 0]^T$  の像を  $[a, c]^T$  とし,  $[0, 1]^T$  の像を  $[b, d]^T$  とすると,

$$F\left([\xi, \eta]^T\right) = A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (10)$$

が成り立つ.

さらに,  $q(t)$  が周期  $\tau$  の周期関数であることから,  $\tau_n = n\tau$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) とおくと, (4) の解  $x(t), y(t)$  について,

$$\begin{bmatrix} x(\tau_{n+1}) \\ y(\tau_{n+1}) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(\tau_n) \\ y(\tau_n) \end{bmatrix} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (11)$$

が成り立ち, これより,

$$\begin{bmatrix} x(\tau_n) \\ y(\tau_n) \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

が得られる. 一方, 行列  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  が相異なるとき, 正則行列  $T$  が存在して,

$$A^n = T \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} T^{-1} \quad (13)$$

と表される. したがって, (4) の解の漸近的な挙動は行列  $A$  の固有値を調べることによって解析される.

支点の上下運動が

$$\eta(t) = \sin(\omega t) \quad (\omega \text{ は正の定数}) \quad (14)$$

で与えられるとき,  $\eta''(t)$  の周期は  $\tau = 2\pi/\omega$  で与えられる. 簡単のため,  $l_0 = g$  とおいて, いくつかの  $\omega$  の値について, 行列  $A$  (の近似値) を, 方程式 (4) をルンゲ・クッタ法で解いて求めた.

例えば,  $\omega = 13.8$  のとき,

$$A = \begin{bmatrix} 0.354011 & 0.461437 \\ -0.902241 & 1.648744 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

固有値  $0.948879, 1.053875$ ,  $\omega = 13.9$  のとき,

$$A = \begin{bmatrix} 0.352619 & 0.457890 \\ -0.915507 & 1.647101 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

固有値  $0.99986 \pm 0.01675i$  (絶対値 1) となる. これらの結果から, 0.1 刻みで考えると,  $\omega = 13.8$  まだが不安定,  $\omega = 13.9$  からが安定となる.

## 5 計算結果

ここでは, ルンゲ・クッタ法を用いて解いた方程式 (4) の解の様子を示す. いずれも, 初期値を  $x(0) = \pi - 3.04$ ,  $y(0) = 0$  で与えたときの  $x(t)$  のグラフを表している. 上の解析の通り,  $\omega = 13.8$  では不安定,  $\omega = 13.9$  では安定となっている.

## 6 おわりに

研究してまず  $\omega$  の値が 13.4 から安定というルンゲ・クッタ法で求められていた解が違うのではないかと疑い, 0.1 刻みで実験を繰り返した. その結果 13.9 から安定という結果になり, 計算結果と一致させることが出来た. 地道に研究した結果, 間違いのない結果を求めることが出来て良かったと感じている.

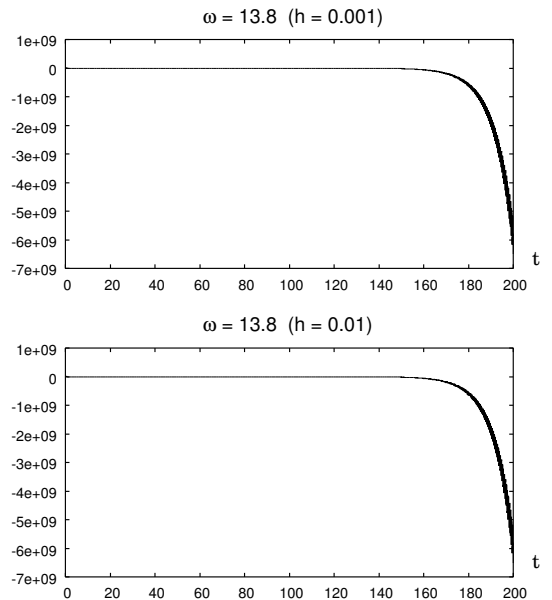


図 1 方程式 (4) の近似解 ( $\omega = 13.8$ )

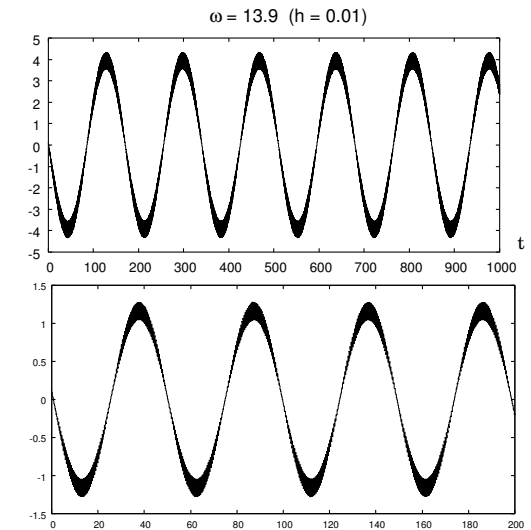


図 2 方程式 (4) の近似解 (上  $\omega = 13.9$ , 下  $\omega = 14.0$ )

## 参考文献

- [1] V.I. アーノルド (安藤昭一・蟹江幸博・丹羽敏雄 訳): 「古典力学の数学的方法」 岩波書店, 東京, 1980. (第 5 章 「振動」)
- [2] 三井・小藤俊幸: 「常微分方程式の解法」 共立出版, 東京, 2000. (第 6 章 「ルンゲ・クッタ法」)
- [3] 高塚俊直: 「支点が上下する倒立振り子の安定性について」, 南山大学数理情報学部情報システム数理学科 卒業論文, 2012.
- [4] 戸田盛和: 「一般力学 30 講」, 朝倉書店, 1994. (第 11 講 「支点の上下する振り子」)