

# 論理パズルにおける同値性と真理値表

2007MI043 日比野遥翼

指導教員：佐々木克巳

## 1 はじめに

私は数理論理学を研究していく過程で、論理パズルについて着目した。論理パズルには様々なものがあるが、レイモンド・スマリヤン [1] の論理パズルでは、問題の解答が言葉によるものであり、その内容は発想力や理解力が必要であると感じた。私はその発想力や理解力のハードルを、真理値表を用いた解を与えることによって下げることができるのではないかと考えた。

本研究は、レイモンド・スマリヤン [1] の論理パズルに対して、真理値表を用いた解法の研究を目的とした。具体的に、「タール医師とフェザー教授の精神病院」の 1~7, 9 番、「試験官クレイグのトランシルバニア訪問」の 1~12 番、「夢の小島」の 1~12 番に対して、真理値表を用いた解を与え、[1] で紹介されている解と比較した。

本稿では、[1] の「タール医師とフェザー教授の精神病院」から 6 番と 7 番、「夢の小島」から 9 番の問題に対して、真理値表を用いた解を与える。

## 2 論理記号と真理値表

論理パズルを解くにあたって必要な情報がある。この節ではその情報について記す。

本稿で用いる論理記号は、「~でない」を表す  $\neg$ 、「ならば」を表す  $\rightarrow$  (または  $\supset$ )、「同値」を表す  $\leftrightarrow$  (または  $\equiv$ )、「かつ」を表す  $\wedge$ 、「または」を表す  $\vee$  の 5 つである。また、真理値 T は「真である」を意味し、真理値 F は「偽である」を意味する。

2 つの命題 P, Q があった場合、それぞれの論理式に関する真理値表は以下ようになる。

表 1 真理値表

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F	F

## 3 タール医師とフェザー教授の精神病院

この節では、[1] の「タール医師とフェザー教授の精神病院」の 6 番, 7 番 (本稿では問題 1, 問題 2) に対して、真理値表を用いた解法の研究を行う。これらの問題は、いくつかの精神病院に関する事であり、その前提条件を要約して記す。

- これらの病院の居住者は、患者か医者 of のいずれかである。
- これらの病院の居住者は、正気か狂気 of のいずれかである。
- 正気の人々は、真実のことを信じ、偽りのことは信じない。

- 狂気の人々は、偽りのことを信じ、真実のことは信じない。
- 自身が発言したことは、真実であれ偽りであれ信じている。
- 正気の患者であれば、精神に関して何も異常がないのでこの病院に居るべきでない。
- 狂気の医者であれば、精神に関して異常があるのでこの病院に居るべきでない。

上記の条件から、この病院の居住者 A と文 P に対して、次の関係が成立する。

- (1) A が P と信じる 「A が正気である P」
- (2) A が P と発言する 「A が正気である P」

問題 1 次の病院でクレイグは居住者の一人に尋ねた。「君は自分が患者だと信じるかね？」その居住者は答えた。「私はそうだと信じていることを信じているんだ」と。この病院はやはり何か狂っていると思うか？

[問題の解釈]

問題に関して、居住者の答えにある「そうだと信じる」の「そう」の解釈は 2 種類あり、「私は患者である」と「私は患者である」と信じる」である。

原書である [2] より、『“Do you believe you are a patient?” The inhabitant replied, “I believe I do.”』と述べているので、「そう (「私は患者である」と信じる)」と信じている」と居住者は答えたことになる。解釈の違いで求まる解は変わってしまうので気を付けなければならない。ここでは後者の解釈である。

[真理値表を用いた解]

その居住者を A とし、P, Q を次のように置く。

P : A は、正気である。

Q : A は、患者である。

この問題に関する真理値表を表 2 にまとめた。「私はそうだと信じている」の意味を考えると、「私は患者である」と信じる」と信じている」という意味であり、(1) より、A の発言は  $P \leftrightarrow (P \wedge Q)$  と同値である。したがって、(2) の右辺は  $P \leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q))$  である。(2) より  $P \leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q))$  の真理値は T である。表 2 において、 $P \leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q))$  が T となる行は 1 行目と 4 行目である。つまり、A は正気の患者か狂気の医者である。前提条件により、いずれの場合もこの病院に居るべきでないので、この病院は狂っていると言える。

表 2 問題 1 の真理値表

P	Q	$P \wedge Q$	$P \leftrightarrow (P \wedge Q)$	$P \leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q))$	A
T	T	T	T	T	正気の患者
T	F	F	F	F	
F	T	F	T	F	
F	F	T	F	T	狂気の医者

問題 2 クレイグは次の病院はもっと興味があると思った。

彼は2人の居住者AとBに会って次のことを知った。AはBが狂気であると信じていること、およびBはAが医者であると信じていることだ。そのとき、クレイグは2人のうちの1人に去ってもらうよう処置した。それはどちらで、そのわけは？

[真理値表を用いた解]

P, Q, R を次のように置く。

P: A は, 正気である。

Q: B は, 正気である。

R: A は, 医者である。

この問題に関する真理値表を表3にまとめた。「Aは「Bが狂気である」と信じている」という文は、(1)より  $P \rightarrow Q$  である。同様に「Bは「Aが医者である」と信じている」という文は、(1)より  $Q \rightarrow R$  である。表3において、どちらもTとなる行は4行目と5行目であり、Aは正気患者が狂気医者のどちらかであるが、Bはこの情報だけでは判断できない。前提条件により、この病院から去るべき人はAである。

表3 問題2の真理値表

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	A	B
T	T	T	F	T		
T	T	F	F	F		
T	F	T	T	F		
T	F	F	T	T	正気患者	狂気医
F	T	T	T	T	狂気患者	正気医
F	T	F	T	F		
F	F	T	F	F		
F	F	F	F	T		

#### 4 夢の小島

この節では、[1]の「夢の小島」の9番(本稿では問題3)に対して、真理値表を用いた解法の研究を行う。これらの問題は、夢の小島に関する事であり、その前提条件を要約して記す。

- ・この島の住民は、昼型と夜型の2つのタイプがある。
- ・この島の住民は、目覚めているか眠っているかのどちらかである。
- ・昼型住人は、目覚めている間は真実を信じ、眠っている間は偽りを信じる。
- ・夜型住人は、眠っている間は真実を信じ、目覚めている間は偽りを信じる。

上記の条件から、この住民Aと文Pに対して、次の関係が成立する。

(4)AがPと信じる 「Aが昼型である Aが目覚めている」 P」

(5)Aの信じることは正しい 「Aが昼型である Aが目覚めている」

問題3 この島には王と女王そして王女がいる。あるとき、王女は彼女の両親は違ったタイプだと信じた。12時間たつて、彼女は自分の様子を変えた(眠りから目覚めへ、または目覚めから眠りのいずれかへと)が、そのとき、彼女は父が昼型で母が夜型であると信じた。王は何型か、して

女王は何型か？

[真理値表を用いた解]

P, Q, R を次のように置く。

P: 王は, 昼型である。

Q: 女王は, 昼型である。

R: 王女は, 真実を信じる。

この真理値表を表4にまとめた。王と女王に関して、目覚めているかどうかは問われていなく、さらに信じることにしての文もないので、「王(女王)は、目覚めている」の命題は必要ない。王女に関して、彼女のタイプや目覚めているかどうかは問われていないが、信じることにしての文があるので、「王女は、真実を信じる」の命題を用いる。(4)と(5)より、2つの文から正しいとわかる論理式は以下の通りである。

「王女は彼女の両親は違ったタイプだと信じた。」  $R \rightarrow (P \rightarrow Q)$

「12時間たつて彼女は自分の様子を変え、父が昼型で母が夜型であると信じた。」  $\neg R \rightarrow (P \rightarrow Q)$

表4において、2つの論理式の真理値がTになるのは5行目だけである。したがって、王は夜型で、女王は昼型である。

表4 問題3の真理値表

P	Q	R	$\neg(P \rightarrow Q)$	$P \rightarrow Q$	R	$\neg(P \rightarrow Q)$	$\neg R$	$(P \rightarrow Q)$
T	T	T	F	F	F	F	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F	F	T	T
F	F	F	F	F	T	T	F	F

#### 5 おわりに

本研究では、真理値表を用いて解を与えることによる問題の解きやすさを学ぶことができた。[1]の解法は文章のみの説明で、文章の量が多く読み違いを起こしやすいので、論理的で具体的に、かつ簡潔に進めた本研究の解法の方が理解しやすく、表でまとめているので見やすくなった。

しかし、すべての問題に関して真理値表を用いた解を与えることはできなかった。それは「全ての」や「ある」が現れる述語論理の問題である。この問題はシークエントを用いて解を与えることになってしまい、本研究の目的である「真理値表を用いた解法の研究」から外れる結果となった。

したがって、問題によっては解を与えることができないのを考慮して、柔軟な対応をすることが重要である。

#### 参考文献

- [1] レイモンド・スマリヤン(阿部剛久 訳): “数学パズル 美女が野獣か?”, 森北出版社株式会社, 東京, 1996.
- [2] Raymond Smullyan: “THE LADY OR THE TIGER? and Other Logic Puzzles”, Oxford University Press, Oxford, 1991.