ロケット飛行の数学モデル

2008MI021 後藤剛治

指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

アポロ・月ロケットの打上げに使われたサターン・ロケットでは, 人工衛星が最上段になっている 3 段式ロケットが使用された. 参考文献 [1] では,2 段式ロケットまでの概要が記載されていたが, 人工衛星の軌道に留まるために必要な条件には達していません. それらを元にロケット飛行のおもな特質を考察し,3 段式ロケットを用いて, 地球のまわりにある典型的軌道へ人工衛星を打上げる問題を考える. ただし, ロケットに動く大気による抵抗力などの全ての外力を無視する.

2 第一宇宙速度

人工衛星を典型的軌道に留まるために必要な速度を第一宇宙速度という. 地球の中心に向かう重力は,γ を万有引力定数, m を人工衛星の質量, Me を地球の質量, 地表からの高さを h, 地球の半径を Re とし, $a = h + Re$ を軌道半径とすると, ニュートンの引力の逆平方法則により

$$\frac{\gamma m Me}{a^2}$$

人工衛星の速度を v とすると, この力は遠心力 mv^2/a によってつり合いがとれる. したがって

$$\frac{\gamma m Me}{a^2} = \frac{mv^2}{a}$$

よって

$$v = \left[\frac{\gamma Me}{h + Re}\right]^{\frac{1}{2}}$$

地表から高さ 100km の一つの軌道に対して,$\gamma = 6.7 \times 10^{-11}$,$Me = 6 \times 10^{24}$,$h + Re = 100 + 6378 = 6478$ とすると

$$v \simeq 7.8\mathrm{kms}^{-1} \tag{1}$$

したがって, この速度を満たすとき, 人工衛星が典型的軌道に留まることが可能となる.

3 1 段式ロケットの最終速度

ニュートンの第二法則を活用して, 速度 v で動く質量 m のロケットを考える. 短時間 δt 内に, 速度 v と逆方向に速度 u で放出される気体を δmp とする.

ニュートン第二法則を, 質点系全体に適応すると

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{[(m - \delta mp)(v + \delta v) + \delta mp(-u)] - mv}{\delta t}\right] \\ &= \lim_{\delta t \to 0}\left[m\frac{\delta v}{\delta t} - (u + v)\frac{\delta mp}{\delta t} - \frac{\delta mp}{\delta t}\delta v\right] \\ &= m\frac{dv}{dt} - (u + v)\frac{dmp}{dt} \end{aligned}$$

ここで,$c = u + v$ は相対的排出速度である. また dmp/dt は, 推進用燃料の質量の変化率なので,$\frac{dmp}{dt} = -\frac{dm}{dt}$ が成り立つ. よって, $F = m\frac{dv}{dt} + c\frac{dm}{dt}$ と表すことができる. ロケットに動く主な力は, 大気による抗力などが考えられるが, すべての外力を無視する条件なので $F = 0$ である. したがって, 速度 v の微分方程式によるモデルは

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{c}{m}$$

この微分方程式の解は

$$v = -c \log m + A \quad (A \text{ は積分定数})$$

P を人工衛星の質量,m_1 を発射前のロケットの質量とし, 初期時刻は $v = 0$ と仮定する. ロケットの質量 m_1 は二つの部分, 燃料の質量 $\varepsilon m_1 (0 < \varepsilon < 1)$ と, 外装部分などの質量 $(1 - \varepsilon)m_1$ の二つから成る. 初期時刻の時 $m = m_1 + P$ である. 定数 A は,$0 = -c\log(m_1 + P) + A$ より求めることができるので

$$v = -c \log\left[\frac{m}{m_1 + P}\right]$$

燃料が無くなったとき,$m = (1 - \varepsilon)m_1 + P$ となるので

$$v = -c \log\left[1 - \frac{\varepsilon}{1 + \beta}\right] \tag{2}$$

ここで $\beta = \frac{P}{m_1}$ とする.(β は人工衛星などの運んでいる物の質量と, 燃料を放出しているロケットの質量の比であることがわかる) 相対速度 c は, 典型的な値として約 $3.0\mathrm{kms}^{-1}$ である.ε は典型的には 0.8 であり,β は $\frac{1}{100}$ とする. これは, 人工衛星 P とロケット m_1 が $1 : 100$ であるということである. これらによって最終速度 v は

$$v_1 \simeq 4.7\mathrm{kms}^{-1}$$

である.

4 2 段式ロケットの最終速度

多段式ロケットでは, 各段燃えつきるとその段の外装部分が捨てられる仕組みになっている. 各段の初期質量を, それぞれ m_1, m_2 とし, 最上段に人工衛星 P を搭載した 2 段式ロケットを考える. 簡易にするため,2 つのロケットの排気速度などの構造的な要素は等しいものと仮定する.1 段目のロケットが燃焼する間に運ぶ搭載量は,2 段目のロケット m_2 と衛星 P である. そして燃料を吹き出し切り離されるロケットは m_1 なので,$\beta = \frac{m_2 + P}{m_1}$ であると考えると, 式 (2) より,1 段目のロケットで得られる速度増加は

$$-c \log\left[1 - \frac{\varepsilon m_1}{m_1 + m_2 + P}\right] \quad (1 \text{ 段目燃焼時})$$

同じく式 (2) より,2 段目のロケットで得られる速度増加は

$$-c \log\left[1 - \frac{\varepsilon m_2}{m_2 + P}\right] \quad (2 \text{ 段目燃焼時})$$

2 段式ロケットの最終速度は, この 2 段階のプロセスで得た最終速度を足すことで算出することができる.

$$v_2 = -c\log\left[1-\frac{\varepsilon m_1}{m_1+m_2+P}\right] - c\log\left[1-\frac{\varepsilon m_2}{m_2+P}\right]$$

$m_1 = m_2$ とすると,$\beta = \frac{1}{100}$ より

$$\frac{P}{m_1+m_2} = \frac{1}{100}$$

したがって, $m_1 = m_2 = 50P$ となる. また, それぞれ典型的な値として, 相対速度 $c = 3.0\mathrm{kms}^{-1}$, $\varepsilon = 0.8$, $\beta = 1/100$ とする. これらの数値で計算すると

$$v_2 \simeq 6.1\mathrm{kms}^{-1}$$

これまでの条件として, 各段のロケットの質量は等しいとしていたが, 質量の比を変えることで最終速度の向上を試みる.

5　3 段式ロケットの最終速度

1,2 段式ロケットの解析を踏まえて,3 段式ロケットで出しうる最終速度を計算する. 各段の初期質量を,m_1, m_2, m_3 とし, 最上段に人工衛星 P を搭載したロケットを考える.3 つのロケットの構造的な要素は等しいものと仮定し, これまでと同様に 3 段式ロケットの最終速度を求めると,

$$\begin{aligned} v_3 = &-c\log\left[1-\frac{\varepsilon m_1}{m_3+m_2+m_1+P}\right] \\ &-c\log\left[1-\frac{\varepsilon m_3}{m_3+P}\right] \\ &-c\log\left[1-\frac{\varepsilon m_2}{m_3+m_2+P}\right] \end{aligned} \tag{3}$$

となる. 各段の質量 m_1, m_2, m_3 をそれぞれ等しいものとし,$\beta = \frac{1}{100}$ であることを考えると

$$\frac{P}{m_1+m_2+m_3} = \frac{1}{100}$$

これより,$m_1 = m_2 = m_3 = (100/3)P$ となる. $c = 3.0\mathrm{kms}^{-1}, \varepsilon = 0.8$ を代入し, $m_1 = m_2 = m_3 = (100/3)P$ を用いて計算すると

$$v_3 \simeq 6.92\mathrm{kms}^{-1}$$

6　3 段式ロケットの最適な質量比

これまでの条件として, 各段のロケットの質量は等しいとしていたが, 質量の比を変えることで最終速度の向上を試みる. $P/m = \frac{1}{100}$ より, 全体の質量 $m = m_1+m_2+m_3 = 100P$ となる. それらを踏まえて,$m_2 = xP, m_3 = yP$ とおくと

$$\begin{aligned} v_3 = &-c\log\left[1-\frac{\varepsilon(-yP-xP+100P)}{101P}\right] \\ &-c\log\left[1-\frac{\varepsilon yP}{yP+P}\right] \\ &-c\log\left[1-\frac{\varepsilon xP}{yP+xP+P}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

式 (4) は x, y の関数なので,v_3 が最大となるためには, $\frac{dv_3}{dx} = 0, \frac{dv_3}{dy} = 0$ を満たす. 連立方程式を解くと,$0 < y < x < 100$ となる停留点は

$$x = 17.03, y = 3.65 \tag{5}$$

したがって,$m = m_1+m_2+m_3 = 100P$ より, 各段の質量は

$$m_1 = 79.3P, m_2 = 17P, m_3 = 3.7P$$

である. 式 (3) に $m_1 = 79.3P, m_2 = 17P, m_3 = 3.7P, c = 3.0, \varepsilon = 0.8$ を代入すると

$$v_3 \simeq 8.9\mathrm{kms}^{-1}$$

となり, 第一宇宙速度を十分に満たす. また, これらの結果が極大値であるか, 検証する必要がある. 式 (4) $= F$ とすると,

$$D(x,y) = F_{xx}(x,y)F_{yy}(x,y) - F_{xy}(x,y)^2$$

において,

$$D(a,b) > 0, F_{xx}(a,b) < 0 \tag{6}$$

ならば, $F(x,y)$ は (a,b) で極大である.(5) の x, y に対して,

$$D(x,y) = 1.6\times10^{-4}$$

$$F_{xx}(x,y) = -0.3\times10^{-2}$$

となるので, 条件 (6) を満たす. よって 式 (4) は,(5) の x, y に対して, 極大値をとる. また, 式 (4) の等高線は下記の図のようになり,$x = 17, y = 3.5$ 付近で最大値の $v = 8.90$ を取ることがわかる.

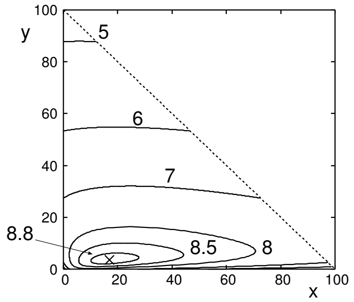

図 1　式 (4) の等高線

7　おわりに

質量がそれぞれ等しいものとする時,1,2,3段式ロケットでは第一宇宙速度 $v \simeq 7.8\mathrm{kms}^{-1}$ を満たすことはできなかった. だが,3 段式ロケットの最適な質量比 $m_1 : m_2 : m_3 = 79.3 : 17 : 3.7$ のとき $v_3 \simeq 8.9\mathrm{kms}^{-1}$ となり, 第一宇宙速度を満たす結果となった.

参考文献

[1] デヴィッド・バージェス/モラグ・ボリー (垣田高夫/大町比佐栄 訳),『微分方程式で数学モデルを作ろう』, 日本評論社, 東京, 1990.