インパルス制御によるハロー軌道への移行とその維持

2009SE066 池山拓弥　 2009SE103 加藤圭

指導教員：市川朗

1　はじめに

現在，数多くの宇宙探査機が打ち上げられ，それらによる様々なミッションが実行されている．例えば，1995 年末には ESA/NASA により，太陽表面･コロナ･太陽風を連続的に観測することを目的とした太陽観測衛星 SOHO(Solor and Heliospheric Observatory) が地球・太陽系のラグランジュ点 (L_1 点) 近傍のハロー軌道に打ち上げられた [2]．ラグランジュ点とは二つの天体の引力と宇宙機の遠心力が釣り合う点であり L_1 から L_5 まで存在し，ラグランジュ点近傍の周期的な軌道をハロー軌道という．特に地球・月系の L_2 点近傍のハロー軌道は月に隠れることがないので軌道上の衛星は地球から常に観測可能である [3]．従って，衛星を仲介して月の裏側の月面基地と地球との交信などが可能である．今後，ハロー軌道の重要性は増していくと考えられる．しかし，この軌道は非常に不安定であるので，制御を行わなければ軌道を維持することが困難である．本研究では，地球・月系において L_2 点に宇宙港が存在するとし，そこから宇宙機を打ち上げることを想定し，ハロー軌道への移行とその軌道を維持することを目的とする．軌道への移行・維持を行う際には，インパルス制御を用い，その制御性能について考察する．また，性能の評価には消費燃料と比例の関係にある総速度変化 (ΔV) と軌道移行にかかる時間 (整定時間) を用いる．

2　円制限三体問題

地球，月，宇宙機の三体問題を考える．宇宙機の質量が月，地球に比べて十分小さいので，地球と月の運動に影響を与えない．これを制限三体問題と呼ぶ．ニュートンの運動方程式は

$$M_e\ddot{\boldsymbol{R}}_e = \frac{GM_eM}{D^3}\boldsymbol{D} + \frac{GM_em}{r_e^3}\boldsymbol{r}_e \tag{1}$$

$$M\ddot{\boldsymbol{R}}_M = -\frac{GM_eM}{D^3}\boldsymbol{D} + \frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

となる．

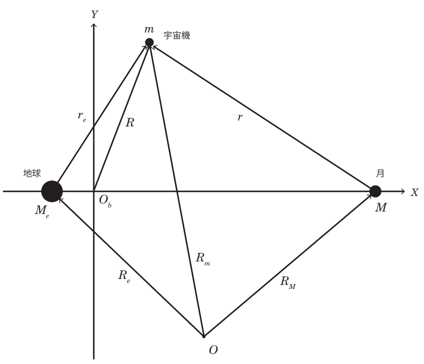

図 1　三体問題

ここで，変数は表 1 のように定義する．

表 1　変数定義

変数	説明	値
D_0	地球-月間の距離	384,748 [km]
M_e	地球と月の質量比	$81.3045M$
μ_1	$\mu_1 = GM_e$ とする定数	398,601 [km^3/s^2]
μ_2	$\mu_2 = GM$ とする定数	4,887 [km^3/s^2]
μ	$\mu = \mu_1 + \mu_2$ とする定数	403,488 [km^3/s^2]
n	$n = (\mu/D_0^3)^{1/2}$ とする角速度	2.661699×10^{-6} [rad/s]
ρ	$\rho = M/(M_e + M)$ とする月の質量の割合	0.01215
D_1	ρD_0 とする地球から重心までの距離	4,674 [km]
D_2	$(1-\rho)D_0$ とする月から重心までの距離	380,073 [km]
G	万有引力定数	6.67384×10^{-11} [m^{3}s^{-2}kg^{-1}]
$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}_M - \boldsymbol{R}_e$	-
$\boldsymbol{u}$	状態方程式における入力ベクトル	-

(1) と (2) より

$$\ddot{\boldsymbol{D}} = -\frac{G(M_e + M)}{D^3}\boldsymbol{D} + Gm(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{r}_e}{r_e^3}) \tag{3}$$

となり，また $m \ll M_e$, M より (3) は

$$\ddot{\boldsymbol{D}} = -\frac{\mu}{D^3}\boldsymbol{D}$$

となる．$\boldsymbol{R}$ を地球・月系の重心からの位置ベクトルとする．$m\boldsymbol{u}$ を推進力とすると，ニュートンの運動方程式より

$$m\ddot{\boldsymbol{R}} = -\frac{GM_em}{r_e^3}\boldsymbol{r}_e - \frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} + m\boldsymbol{u} \tag{4}$$

となる．$O - \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ は，原点 O を地球・月系の重心，$\boldsymbol{i}$ を動径方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{j}$ を月の回転方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{k}$ を鉛直方向の単位ベクトルとする回転座標系である．また，地球・月系の円運動の角速度ベクトルは $n\boldsymbol{k}$ となる．さらに

$$\boldsymbol{R} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r}_e = D_1\boldsymbol{i} + \boldsymbol{R} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - D_2\boldsymbol{i} \tag{7}$$

とおく．(4)，(5)，(6)，(7) を用い，$\tau = t/(1/n)$，$\bar{X} = X/D_0$，$\bar{Y} = Y/D_0$，$\bar{Z} = Z/D_0$ とし，無次元化をすると，

$$\begin{aligned}&\bar{X}'' - 2\bar{Y}' - \bar{X}\\&\quad = -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(\bar{X}+\rho) - \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X}-1+\rho) + \bar{u}_x \end{aligned} \tag{8}$$

$$\bar{Y}'' + 2\bar{X}' - \bar{Y} = -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Y} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Y} + \bar{u}_y \tag{9}$$

$$\bar{Z}'' = -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Z} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Z} + \bar{u}_z \tag{10}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\bar{r}_e &= \left[(\bar{X}+\rho)^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2\right]^{1/2}\\ \bar{r} &= \left[(\bar{X}-1+\rho)^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2\right]^{1/2}\\ \bar{u}_x &= \frac{u_x}{n^2 D_0}\\ \bar{r}_e &= \frac{r_e}{D_0}\end{aligned}$$

であり，$'$ は τ による微分を示す．以下では，運動方程式 (8)，(9)，(10) を用いる．

3　ハロー軌道

(8)，(9)，(10) は (11) を満たす定常点を持ち，ラグランジュ点として知られている．

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(\bar{X}+\rho) + \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X}-1+\rho)\\ \bar{Y} &= \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Y} + \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Y}\\ \bar{Z} &= 0\end{aligned} \tag{11}$$

その解のうち，月の裏側にある点を L_2 点と呼び，以下で与えられる [1].

$$L_2 = (l_2(\rho), 0, 0), \quad l_2(\rho) = 1.15568$$

ここで，L_2 点を原点とした座標系 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ を考えると，$\bar{X}$，$\bar{Y}$，$\bar{Z}$ はそれぞれ $\bar{x} + l_2$，$\bar{y}$，$\bar{z}$ と表すことができ，その原点で線形化すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}\bar{x}'' - 2\bar{y}' - (2\sigma+1)\bar{x} &= \bar{u}_x\\ \bar{y}'' + 2\bar{x}' + (\sigma-1)\bar{y} &= \bar{u}_y\\ \bar{z}'' + \sigma\bar{z} &= \bar{u}_z\end{aligned}$$

ここで $\sigma = \rho/|l_2(\rho) - 1 + \rho|^3 + (1-\rho)/|l_2(\rho)+\rho|^3 = 3.19043$ である．また，$\bar{X}$，$\bar{Y}$，$\bar{Z}$ をそれぞれ $\bar{x} + l_2$，$\bar{y}$，$\bar{z}$ で置き換えた場合の (8)，(9)，(10) の状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = A\boldsymbol{x}(\tau) + B\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{x}(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{x}' & \bar{y}' & \bar{z} & \bar{z}' \end{pmatrix}^T$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2\sigma+1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -\sigma+1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 0\end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} l_2 - 2\sigma\bar{x} - \dfrac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(\bar{x}+l_2+\rho) - \dfrac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{x}+l_2-1+\rho)\\ \sigma\bar{y} - \dfrac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{y} - \dfrac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{y}\\ \sigma\bar{z} - \dfrac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{z} - \dfrac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{z}\end{pmatrix}$$

である．

4　インパルス制御

パルス入力において，積分を一定にし時間を無限小，入力を無限大にしたものはインパルス入力と呼ばれる．連続時間のシステムは

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

となる．時刻 $[s, s+h]$ で入力 $\boldsymbol{u}_s/h$ を与えると，$t < s$ のとき

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0$$

となり，$t > s+h$ のとき

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + e^{At}\frac{1}{h}\int_s^{s+h} e^{-Ar}B\boldsymbol{u}_s dr$$

となる．$h \to 0$ とすれば

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + e^{A(t-s)}B\boldsymbol{u}_s$$

となる．s における左右の極限値は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(s-) &= \lim_{t\nearrow s}\boldsymbol{x}(t) = e^{As}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}(s+) &= \lim_{t\searrow s}\boldsymbol{x}(t) = e^{As}\boldsymbol{x}_0 + B\boldsymbol{u}_s\end{aligned}$$

となる．ここで，一定時間ごとにインパルス入力を入れる．時間 ks に $\boldsymbol{u}_{k-1}$ を加え，$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(ks+)$ とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{x}(s+) = e^{As}\boldsymbol{x}_0 + B\boldsymbol{u}_0\\ \boldsymbol{x}_{k+1} &= \lim_{t\searrow(k+1)s}\boldsymbol{x}(t) = e^{As}\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k\end{aligned}$$

が得られ，状態方程式は漸化式

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_d\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k \tag{12}$$

となる．ここで $A_d = e^{As}$ である．

5　最適レギュレータ

システム (12) の最適レギュレータ問題とは

$$J(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x}_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\boldsymbol{x}_k^TQ\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{u}_k^TR\boldsymbol{u}_k\right)$$

を最小にする問題である．ここで，Q は半正定行列，R は正定行列である．(A,B) が可制御，$(\sqrt{Q},A)$ が可観測であるとき，$\boldsymbol{u}_k$ は離散時間リッカチ代数方程式 (DARE)

$$X=Q+A_d^TXA-A_d^TXB(R+B^TXB)^{-1}B^TXA_d$$

の解 X により

$$\boldsymbol{u}_k=-(R+B^TXB)^{-1}B^TXA_d\boldsymbol{x}_k$$

で与えられる．フィードバックゲインを

$$K=(R+B^TXB)^{-1}B^TXA_d$$

とおく．次に，目標軌道を自由運動

$$\boldsymbol{x}_{fk+1}=A_d\boldsymbol{x}_{fk},\quad \boldsymbol{x}_f(0)=\boldsymbol{x}_{f0} \tag{13}$$

とし，(12) の軌道を (13) の軌道に追従する制御を考える．2 つの軌道の誤差 $\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{fk}$ は

$$\boldsymbol{e}_{k+1}=A_d\boldsymbol{e}_k+B\boldsymbol{u}_k$$

を満たす．よって，安定化フィードバック $\boldsymbol{u}_k=-K\boldsymbol{e}_k$ により誤差 $\boldsymbol{e}_k$ は $\boldsymbol{0}$ に収束し，目標の軌道に追従する．

6　ハロー軌道への移行

目標とするハロー軌道と制御軌道の方程式は非線形であるが，本研究では，線形フィードバック $\boldsymbol{u}_k=-K\left(\boldsymbol{x}(ks+)-\boldsymbol{x}_f(ks)\right)$ を用いる．

7　シミュレーション結果

重み行列 R と 1 周期ごとのインパルス入力回数 α を変化させ，シミュレーションを行う．ここで重み行列 $Q=I_6$，$R=10^rI_3$ と置き，r を変化させその軌道特性を調べる．

7.1　軌道移行制御

制御軌道の初期値を L_2 点におき，ハロー軌道に移行させるための制御を行う．ここで，許容誤差を 10^{-3} とする．

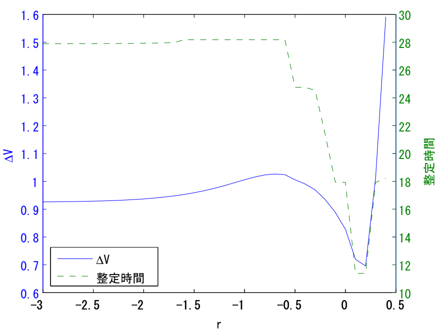

図 2　$\alpha=12$ のときの軌道移行制御 $r-\Delta V$

図 2 より $\alpha=12$ で ΔV が最小となる r は 0.2，そのときの ΔV の値は 6.9×10^{-1} となり，さらに同じ R で整定時間も 11.4 と最小となった．

7.2　中継軌道を導入した軌道移行制御

軌道移行制御において中継軌道を導入したシミュレーションを行う．本研究では，総速度変化を抑える方法として，中継軌道を導入する方法を提案する．また，中継軌道を導入しない場合と比較し検証を行う．$\alpha=12$ の場合の r に対する総速度変化のグラフを図 3 に，$\alpha=30$ の場合の r に対する総速度変化のグラフを図 4 に示す．

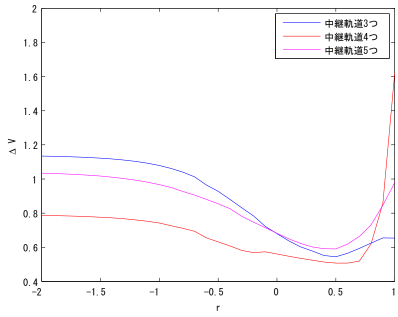

図 3　$\alpha=12$ のときの $r-\Delta V$

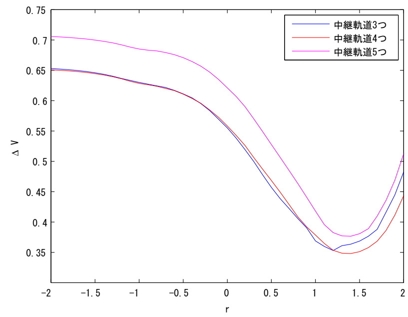

図 4　$\alpha=30$ のときの $r-\Delta V$

図 3 より，$\alpha=12$ のとき ΔV が最小となる r は，中継軌道を 3 つ導入した場合では $r=0.5$，4 つ導入した場合では $r=0.6$，5 つ導入した場合では $r=0.5$ となった．また，図 4 より，$\alpha=30$ のとき ΔV が最小となる r は，中継軌道を 3 つ導入した場合では $r=1.2$，4 つ導入した場合では $r=1.4$，5 つ導入した場合では $r=1.4$ となった．表 2 に $\alpha=12$ の場合の ΔV の最小値とそのときの r，整定時間を示し，表 3 に $\alpha=30$ の場合の ΔV の最小値とそのときの r，整定時間を示す．また，実際の軌道シミュレーションを図 5 に示す．

表 2　$\alpha=12$ の場合の ΔV と整定時間

	r	ΔV	整定時間
中継 3 つ	0.5	5.4×10^{-1}	19.1
中継 4 つ	0.6	5.1×10^{-1}	21.6
中継 5 つ	0.5	5.9×10^{-1}	31.6
中継無し	0.2	6.9×10^{-1}	11.4

表 3　$\alpha = 30$ の場合の ΔV と整定時間

	r	ΔV	整定時間
中継 3 つ	1.2	3.5×10^{-1}	12.3
中継 4 つ	1.4	3.5×10^{-1}	17.7
中継 5 つ	1.4	3.8×10^{-1}	21.6
中継無し	1.2	4.0×10^{-1}	3.5

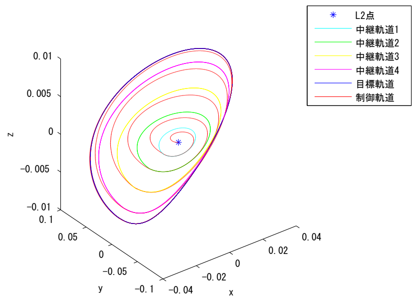

図 5　中継軌道を 4 つ導入した場合の三次元運動

表 2，表 3 より中継軌道を導入すると，ΔV を抑えることができるが，中継軌道を介している為，整定時間は増加することがわかる．また，$\alpha = 12$ の場合の総速度変化は中継軌道を導入しないときに比べて最大で約 26%，最小で約 14% 改善され，$\alpha = 30$ の場合の総速度変化は中継軌道を導入しないときに比べて最大で約 13%，最小で約 5% 改善された．以上より，入力回数が少ない方が中継軌道を導入する効果が大きくなる．

7.3　任意のインパルス入力間隔による軌道維持制御

制御軌道と目標軌道の方程式を同じ初期値で解き，ハロー軌道を維持するための制御を行う．本節では等間隔にインパルス入力をいれる場合とさらに任意のインパルス時刻の場合にわけて考察を行う．

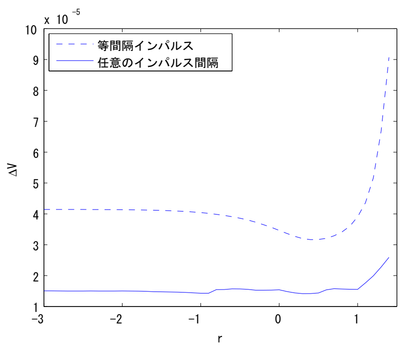

図 6　$\alpha = 12$ のときの軌道維持制御 $r - \Delta V$

$\alpha = 12$ と固定した図 6 より等間隔インパルスでは ΔV が最小となる r は $r = 0.4$ で，$\Delta V = 3.2\times10^{-5}$ となる．インパルス入力時刻を任意に変動させる場合では $r = -0.9$ のとき $\Delta V = 1.4\times10^{-5}$ の最小値となっており，総速度変化は等間隔インパルスの場合に比べて約 56% 改善された．

上記より α によって ΔV が最小となる R が存在する．等間隔インパルスの ΔV が最小の R をそれぞれの α に用いて $\alpha - \Delta V$ を図 7 に示す．

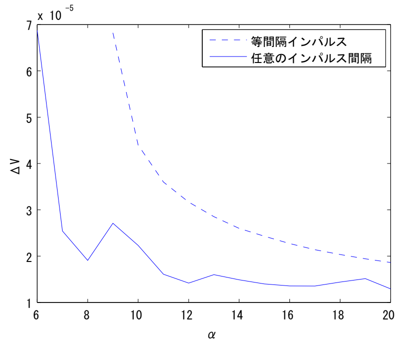

図 7　最適な R を用いた軌道維持制御 $\alpha - \Delta V$

これより，等間隔インパルスでは α が増加したときには ΔV が単調減少であり，インパルス時刻を変動させる場合も同様の傾向がみられる．次に $\alpha = 12, r = 0.4$ で後者の場合のインパルス入力を 1 周期分示したハロー軌道の yz 平面上への射影を図 8 に示した．また，この条件にかかわらず初期値付近に入力をいれない場合 ΔV を抑えられるという結果が得られた．

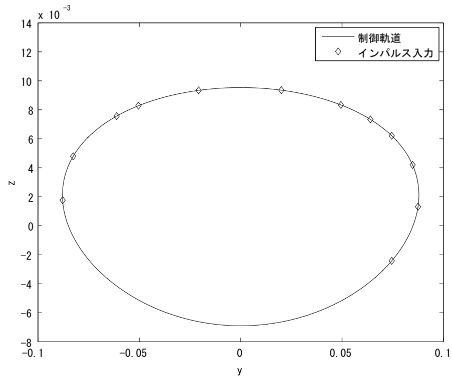

図 8　$\alpha = 12, r = 0.4$ の yz 平面

8　おわりに

中継軌道を導入したシミュレーション結果より，中継軌道を導入することによって，総速度変化を抑えつつ目標軌道への移行が可能であることが確認できた．しかし，中継軌道の設定の仕方や，制御入力の回数を変えた場合など，条件を変化させたときには，再度シミュレーションを行い，検証する必要がある．

軌道維持制御ではインパルス時刻の変動を許し，さらに初期値付近では自由運動にして制御を行う場合が総速度変化が抑えられることを示した．本研究で用いたインパルス入力時刻の探索アルゴリズムはすべての場合を調べてはいないため，アルゴリズムの改善によってはさらに総速度変化が抑えられる可能性がある．

参考文献

[1] A.Ichikawa: Recent Developments in Formation Flying, Lecture Notes, 2010.

[2] 歌島昌由：宇宙開発事業団技術報告　ラグランジュ点近傍の軌道力学，宇宙開発事業団，1997.

[3] 木下宙：天体と軌道の力学，東京大学出版，1998.