

ディסקリプタ表現を用いた磁気浮上装置に対する ロバスト制御

2009SE138 熊田 健良 2010SE238 谷口巧磨

指導教員：陳幹

1 はじめに

磁気浮上系のメリットは、物体を非接触に支持することにより、摩擦から解放されること、騒音が非常に少ないことである。一方で不安定系であるために安定化が困難であるということが挙げられる。また、磁気浮上系は非線形性が強いシステムであり、不確かさを含むパラメータが存在している。本研究では、不確かさを含むパラメータを適切に扱うため、ディスクリプタ表現を用いてゲインスケジューリング制御を行う。

近年、線形ロバスト制御理論の成果に基づいたゲインスケジューリング制御系設計の研究が盛んに行われている[1]。ゲインスケジューリングとは対象とするシステムの変動するパラメータの情報を利用して、補償器のゲインを変える制御手法である。従来の線形制御理論における補償器設計は、対象とするシステムをある平衡点において線形近似を施し、その線形化されたモデルに対して補償器を設計することで対象とするシステムを制御してきた。この方法で得られる補償器は常に変化しないものである。しかし、対象とするシステムが環境の変化や何らかの外乱を受けた場合、対象のシステムが不安定になる恐れがある。このような問題に対しては変動の幅を予め見積もり、パラメータ変動や外乱の影響を低減するような補償器を設計することで対処できる。しかし、この見積もった変動の幅が大きな場合、また、変動の上下界の差が大きいほど、固定の補償器で対象のすべての動作範囲に対応するには、補償器への負担が大きくシステムの性能の劣化等を引き起こす可能性がある。

本研究では、磁気浮上装置に対してより大きな変動に対処することができ、また制御性能の向上にもつながると考えられるゲインスケジューリング制御を用いて適切な制御を行い、鋼球の安定した浮上を目的とする。また、本研究の比較対象としてロバスト LQ 制御を用いて設計した固定ゲインとの比較を行うことで提案手法の有効性を検証する。

2 制御対象

図 1 に磁気浮上系の構成図を示す。本研究で用いる磁気浮上装置は、ボール台座に埋め込まれているセンサーによって鋼球の位置が検出される。またコイルに電流を流すことで、発生した磁界による吸引力で鋼球を浮上させることができる。コイルへの電流を大きくすると吸引力が増大し、鋼球はコイルに近づき、電流を小さくすると吸引力が減少し、鋼球は重力に従いコイルから遠ざかるという原理である。本研究で用いる物理パラメータを表 1 に示す。

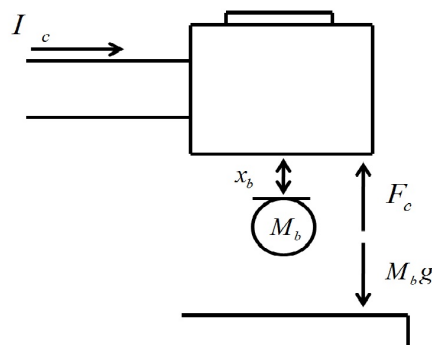


図 1 磁気浮上系の構成図

3 モデリング

3.1 運動方程式の導出と線形化

表 1 物理パラメータ

M_b [kg]	鋼球質量 (=0.045[kg])
g [m/s ²]	重力定数 (=9.81[m/s ²])
I_c [A]	電流
K_m [Nm ² /A ²]	電磁力定数
x_b [m]	鋼球位置 (コイルと鋼球間の距離)
F_c [N]	電磁力引力

図 1 に示される構成図より、ニュートンの第二法則を用いて、磁気浮上系の運動方程式を以下のように表すことができる。

$$M_b \frac{d^2}{dt^2} x_b = M_b g - F_c \quad (1)$$

また、電磁力引力 F_c は電流の 2 乗に比例し、物質間の距離の 2 乗に反比例することから、以下のように表す。

$$F_c = K_m \frac{I_c^2}{2x_b^2} \quad (2)$$

式 (1)、式 (2) より式 (3) を導出できる。

$$\frac{d^2}{dt^2} x_b = g - \frac{K_m I_c^2}{2M_b x_b^2} \quad (3)$$

この式は非線形のため、平衡点 (x_{b0}, I_{c0}) の周りで線形化を行う。 x_{b1} [m] と I_{c1} [A] をそれぞれ鋼球位置の微小変位、

電流の微小変化とすると、実際の変位 x_b と電流 I_c は以下のように表わされる。

$$x_b = x_{b0} + x_{b1}, I_c = I_{c0} + I_{c1} \quad (4)$$

式 (4) を式 (3) に代入し、線形近似することにより、以下のように微分方程式を導出できる。

$$\frac{d^2}{dt^2} x_b = \frac{2gx_{b1}}{x_{b0}} - \frac{2gI_{c1}}{I_{c0}} \quad (5)$$

このとき、閉ループ伝達関数 $G_{b1}(s)$ は

$$G_{b1}(s) = \frac{x_{b1}(s)}{I_{c1}(s)} = \frac{-\omega_b^2 K_{bc}}{s^2 - \omega_b^2} \quad (6)$$

となる。

$$\omega_b = \sqrt{\frac{2g}{x_{b0}}}, K_{bc} = \frac{x_{b0}}{I_{c0}}, I_{c0} = \sqrt{\frac{2M_b g}{K_m}} x_{b0}$$

式 (6) において、極に $s = \omega_b > 0$ が存在するため、極がすべて負ではないので、このシステムが不安定であることがわかる。本研究において、平衡点 x_{b0} と電磁力定数 K_m は変動するので [2]、これらのパラメータに対する不確かさを考慮する。変動範囲は以下のように決定した。また、平衡点において線形近似を行った際の鋼球位置は 8mm、電磁力定数の値は変動範囲の中点とした。

$$x_{b0}[\text{m}] \text{ の変動範囲 : } 3.0 \times 10^{-3} \sim 14 \times 10^{-3}$$

$$K_m[\text{Nm}^2/\text{A}^2] \text{ の変動範囲 : } 6.82 \times 10^{-5} \sim 8.86 \times 10^{-5}$$

3.2 状態方程式及びディスクリプタ方程式の導出

式 (6) より、状態変数 x を $x = [x_{b1} \ \dot{x}_{b1}]^T$ 、入力を $u = I_{c1}$ とすると、状態方程式は以下の式 (7) のように示すことができる。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{x_{b0}} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{\sqrt{\frac{2M_b g}{K_m}} x_{b0}} \end{bmatrix}$$

ここで、行列 B 内に不確かなパラメータと変動パラメータが存在しているためディスクリプタ形式に変形し、行列 B 内から消去するとディスクリプタ方程式を以下のように示すことができる。

$$E_d \dot{x}(t) = A_d x(t) + B_d u(t) \quad (8)$$

ここで、行列 E_d, A_d, B_d は以下のように与えられる。

$$E_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{x_{b0}}{\sqrt{K_m}} \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\sqrt{K_m}} & 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{\sqrt{2M_b g}} \end{bmatrix}$$

不確かなパラメータと変動パラメータを 1 つの係数行列にまとめる。ディスクリプタ変数を \hat{x} とし、 $\hat{x} = [x_{b1} \ \dot{x}_{b1} \ \ddot{x}_{b1}]^T$ とするとディスクリプタ方程式を以下のように示すことができる。

$$\hat{E}_d \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_d \hat{x}(t) + \hat{B}_d u(t) \quad (9)$$

$$y(t) = \hat{C} \hat{x}(t)$$

$$\hat{E}_d = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2g}{\sqrt{K_m}} & 0 & -\frac{x_{b0}}{\sqrt{K_m}} \end{bmatrix}, \hat{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2g}{\sqrt{2M_b g}} \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

3.3 拡大系の導出

本研究では出力 y を目標値に追従させるために拡大系の導出を行う。式 (9) に対して、出力 y 、目標 r と目標の誤差の積分値を z として定義する。状態変数 \tilde{x} を $\tilde{x} = [z \ \hat{x}^T]$ と定義すると、式 (9) から式 (10) を得る。

$$\tilde{E}_d \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_d \tilde{x}(t) + \tilde{B}_d u(t) \quad (10)$$

ここで、 $\tilde{E}_d, \tilde{A}_d, \tilde{B}_d$ は以下のように与えられる。

$$\tilde{E}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{E}_d \end{bmatrix}, \tilde{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{C} \\ 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_d \end{bmatrix}$$

4 制御系設計

4.1 ロバスト LQ 制御

本研究の比較対象としてロバスト LQ 制御を用いて、固定ゲインを設計することを考える。まず、鋼球位置と電磁力定数の変動を考慮したロバスト制御則の設計を行う。制御則の導出にあたり、複数の変動に対して安定性を理論的に保証する。 $\theta_1 = x_{b0}, \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{K_m}}$ とし、変動範囲の端点行列を以下のように定める。

$$\hat{A}_d = \hat{A}_{di}(\theta_1, \theta_2), (i = 1, \dots, 4)$$

$$\hat{A}_{d1} = \hat{A}_d(\theta_1, \theta_2), \quad \hat{A}_{d2} = \hat{A}_d(\theta_1, \bar{\theta}_2)$$

$$\hat{A}_{d3} = \hat{A}_d(\bar{\theta}_1, \theta_2), \quad \hat{A}_{d4} = \hat{A}_d(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$$

システムを安定化させる状態フィードバックコントローラを得るために、 J を最小化する以下の評価関数を考える。ただし、 $x_p = [z \ x^T]$ である。

$$J = \int_0^\infty (x_p^T Q x_p + u^T R u) dt \quad (11)$$

ここで $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \geq 0$ と $R \in \mathbb{R} > 0$ とする。このポリトープ型の拡大システムに対して、以下の補題を用いる。

補題 1: 式 (12) を満たす $X > 0, Y$ が存在するならば、閉ループシステムは、 $u = -K x_p := Y X^{-1} x_p$ で安定化される。

maximize : trace(X)

$$\begin{bmatrix} \text{He}[\tilde{A}_{di} X - \tilde{B}_d Y] & X & Y^T \\ X & -Q^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

$$(i = 1, \dots, 4)$$

式 (12) の各端点を解くことで状態フィードバックゲインは K は $K = Y X^{-1}$ で与えられる。 ($J < \text{trace}[X^{-1}]$)。

4.2 シミュレーション及び実験結果

図2にコイルと鋼球間の距離を4mmから14mmへ変化させたとき、図3に14mmから4mmへ変化させたときのシミュレーションと実験結果の比較を示す。実験結果よ

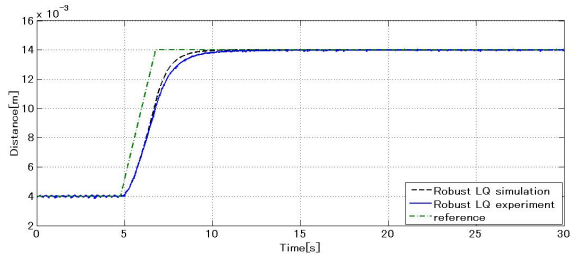


図2 コイルと鋼球間の距離 (4mm~14mm)

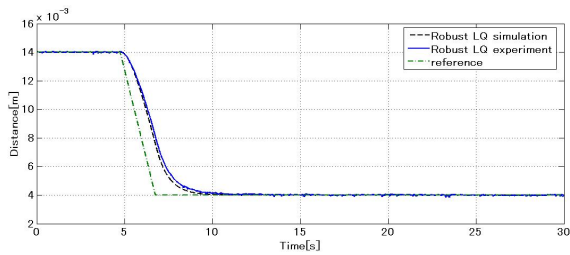


図3 コイルと鋼球間の距離 (14mm~4mm)

り、安定して収束しているのがわかる。また、変動パラメータに対してロバスト性が保証されていることがわかる。

4.3 GS(ゲインスケジューリング) 制御

本研究では、磁気浮上装置に対し、GS(ゲインスケジューリング) 制御を用いて適切な制御を行い、鋼球の安定した浮上を行う手法を示す。設計に用いるスケジューリングパラメータ $\tilde{\theta}_1$ を $\tilde{\theta}_1 = x_{b0}$ とし、 $\tilde{\theta}_1$ の上下界を頂点とする変動の両端点を式 (13) で与える。

$$\tilde{\theta}_1 = x_{b0} : \tilde{\theta}_1 \in \{\underline{\tilde{\theta}}_1, \bar{\tilde{\theta}}_1\} \quad (13)$$

ここで、行列 \tilde{E}_d の構造を考慮してリアプノフ行列 X_d と変数行列 $Y_d(\tilde{\theta}_1)$ の候補を下式として与える。

$$X_d = \begin{bmatrix} X & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$Y_d(\tilde{\theta}_1) = [Y(\tilde{\theta}_1) \ 0] \quad (15)$$

$$Y(\tilde{\theta}_1) = Y_0 + \tilde{\theta}_1 Y_1 \quad (16)$$

また、本研究では LMI 条件を導出するにあたり、参考文献 [3] の補題を用いる。

補題 2: 式 (17) を満たす $X_{11} > 0$, X_d , Y_d が存在するならば、

$$\text{maximize : trace}(X_{11})$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}[\tilde{A}_d X_d - \tilde{B}_d Y_d] & X_d(Q^{\frac{1}{2}})^T & Y_d(R^{\frac{1}{2}})^T \\ Q^{\frac{1}{2}} X_d & -I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y_d & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$$X_d = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$Y_d = [Y \ 0] \quad (19)$$

式 (10) の閉ループシステムは $u(t) = -Y X_{11}^{-1} x_p$ で安定化される。

ここで、式 (17) に存在する変数行列 Y_d のみをスケジューリングパラメータに依存させることを考える。また、行列 \tilde{A}_d , $Y(\tilde{\theta}_1)$ はスケジューリングパラメータに対してアフィンであるので端点行列として表現できる。

次に、電磁力定数 K_m の不確かさをポリトープ表現を用いて保証する。 $\tilde{\theta}_2 = \frac{1}{\sqrt{K_m}}$ とし、 K_m の最小、最大のとき、また、スケジューリングパラメータの変動を考慮して \tilde{A}_{dj} を式 (20) として定める。

$$\tilde{\theta}_2 = \frac{1}{\sqrt{K_m}} : \tilde{\theta}_2 \in \{\underline{\tilde{\theta}}_2, \bar{\tilde{\theta}}_2\}$$

$$\tilde{A}_d = \tilde{A}_{dj}(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2), (j = 1, \dots, 4) \quad (20)$$

$$\tilde{A}_{d1} = \tilde{A}(\underline{\tilde{\theta}}_1, \underline{\tilde{\theta}}_2), \quad \tilde{A}_{d2} = \tilde{A}(\underline{\tilde{\theta}}_1, \bar{\tilde{\theta}}_2)$$

$$\tilde{A}_{d3} = \tilde{A}(\bar{\tilde{\theta}}_1, \underline{\tilde{\theta}}_2), \quad \tilde{A}_{d4} = \tilde{A}(\bar{\tilde{\theta}}_1, \bar{\tilde{\theta}}_2)$$

ここでシステムを安定化させる状態フィードバック GS ゲインを得るための J を最小化させる評価関数は、ロバスト LQ と同様のものを用いる。以上の作業をもとに、LMI 条件は次式となる。

$$\text{maximize : trace}(X_{11})$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}[\tilde{A}_{dj} X_d - \tilde{B}_d Y_d(\tilde{\theta}_1)] & X_d(Q^{\frac{1}{2}})^T & Y_d(\tilde{\theta}_1)(R^{\frac{1}{2}})^T \\ Q^{\frac{1}{2}} X_d & -I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y_d(\tilde{\theta}_1) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$X_{11} > 0, X_d = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

$$Y_d(\tilde{\theta}_1) = [Y(\tilde{\theta}_1) \ 0] \quad (22)$$

$$(j = 1, \dots, 4)$$

上式の LMI 条件を満たす X_d , $Y_d(\tilde{\theta}_1)$ より、状態フィードバック GS ゲインは式 (23) で与えられる。また、実装の際には式 (23) を用いてゲインを導出する。

$$(J < \text{trace}[X_{11}^{-1}])$$

$$K_d(\tilde{\theta}_1) = Y(\tilde{\theta}_1) X_{11}^{-1} \quad (23)$$

4.4 シミュレーション及び実験結果

設計した制御器の有効性を検証するためにシミュレーション、及び実験を行った。図4にコイルと鋼球間の距離を4mmから14mmへ変化させたとき、図5に14mmから4mmへ変化させたときのシミュレーションと実験結果の比較を示す。また、鋼球位置の変動の上界から下界まで

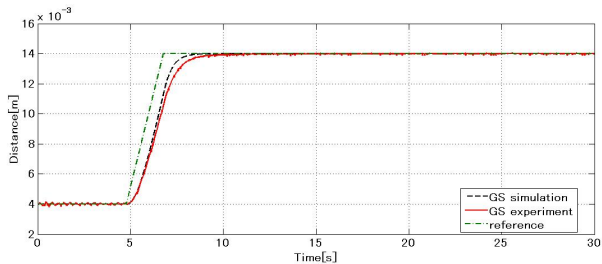


図4 コイルと鋼球間の距離 (4mm~14mm)

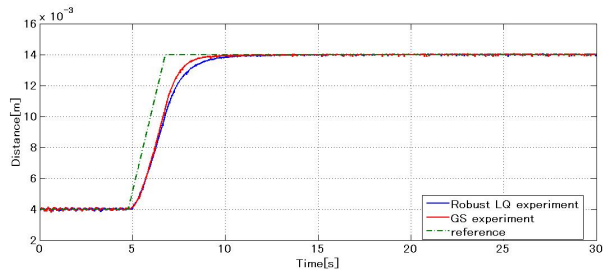


図7 コイルと鋼球間の距離 (4mm~14mm)

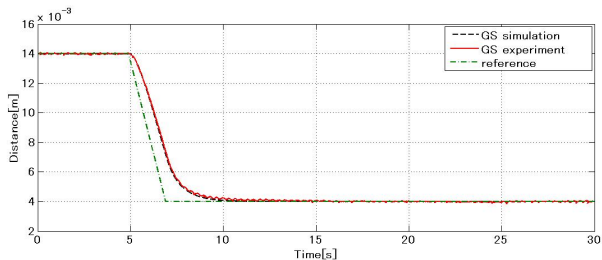


図5 コイルと鋼球間の距離 (14mm~4mm)

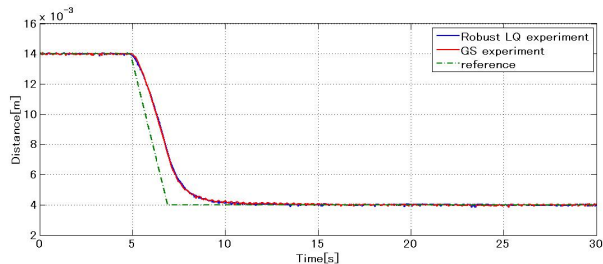


図8 コイルと鋼球間の距離 (4mm~14mm)

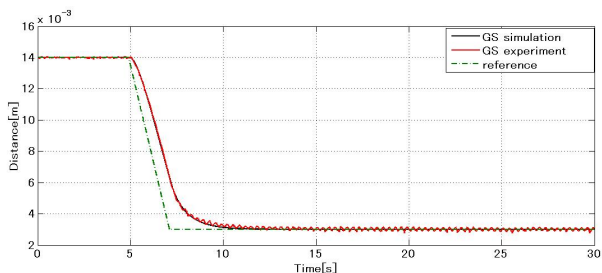


図6 コイルと鋼球間の距離 (14mm~3mm)

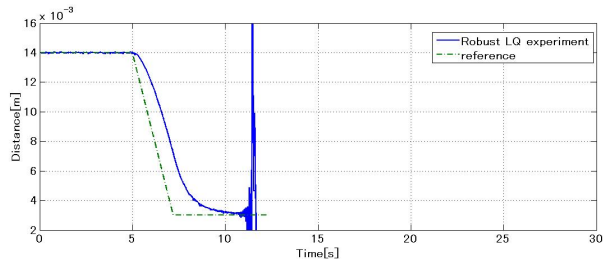


図9 コイルと鋼球間の距離 (14mm~3mm)

移動させる実験を行う。図6に14mmから3mmへ変化させたときのシミュレーションと実験結果の比較を示す。

シミュレーションと実験結果の比較より、単一のリアプノフ関数に基づくGS制御器は安定して収束していることがわかる。

4.5 ロバストLQ制御とGS制御の比較

以下にロバストLQ制御と単一のリアプノフ関数に基づくGS制御の実験結果の比較を示す。図7にコイルと鋼球間の距離を4mmから14mmへ変化させたとき、図8に14mmから4mmへ変化させたときの実験結果の比較を示す。図8より、コイルからの距離を近づけた場合は両者とも同じような応答をみせたが、図7より、コイルからの距離を遠ざけた状況においてはGS制御の方が良い応答を見せた。

また、図9にロバストLQ制御で鋼球位置の変動の上界から下界まで移動させた実験結果を示す。ロバストLQ制御での実験は、シミュレーションでは安定して目標値へ収束していたが、コイルと鋼球間の距離を14mmから3mmへ変化させる実験を行った結果、14mmから3mmへ追従する間、次第に振動的になり安定して浮上しなかった。

5 おわりに

本研究では、ディスクリプタ表現の枠組みにおける、単一リアプノフ関数に基づくGS制御の設計を行い、シミュレーション、及び実験において理論の検証を行った。また、ロバストLQ制御とGS制御の比較を行うことにより、より大きな変動に対して対処できるGS制御の有効性をシミュレーション及び実験において確認した。鋼球位置の変動の上下界を移動させる実験からも、より大きな変動に対してGS制御が有効であることが確認できた。

6 参考文献

- [1] 増淵, 示村: ゲインスケジューリング系の設計におけるディスクリプタ形式の利用について, システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 7, pp. 390-394, 1999.
- [2] 山田: H_∞ 制御による磁気浮上装置のロバスト安定化, 南山大学数理情報学部情報システム数理学科, 2012.
- [3] Tomoya Kanada, Yusuke Watanabe and Gan Chen: Robust H_2 Control for Two-wheeled inverted Pendulum Using LEGO Mindstorms, 2011 Australian Control Conference, pp. 136-141, 2011.