体系 SNK における「ならば」の規則の考察

2009SE219 小川英之

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究は，佐々木 [1] の古典命題論理のシークエント体系 SNK における，SNK 推論規則

$$\frac{\Gamma \to P \quad \{Q\} \cup \Gamma \to R}{\{P \supset Q\} \cup \Gamma \to R}(\supset \text{左})$$

を対象とする。この推論規則は，下式 $\{P \supset Q\} \cup \Gamma \to R$ は証明可能であっても，左の上式 $\Gamma \to P$ が証明不可能になることがある．他の多くの推論規則は，このようなことは起こらず，上式と下式の同値性が成り立つ．そのため，シークエント体系 SNK の証明図の下から上への作成において ($\supset$ 左) の適用は，他の推論規則の適用よりも注意しなければならない．

本研究では，次を満たすシークエント S の作り方を考察した．

(I) S は SNK で証明可能である．

(II) S を下式とする ($\supset$ 左) が存在して，その左の上式は証明不可能である．

その S の作り方は，SNK で証明可能なシークエントに対し，証明可能性を保存する変形に絞った．卒業論文では，この変形の例を挙げ，そこから (I)，(II) を満たすシークエントを実際に作成した．本稿では，３節でその変形の例を挙げ，４～６節で，実際に作成したシークエントの例の一部を挙げる．２節では体系 SNK を導入する．

2　シークエント体系 SNK の導入

この節では，佐々木 [1] に従い，シークエント体系 SNK を導入する．

まず，論理式は，以下の言語を用いて普通の方法で定義する．

命題変数：$p, p_1, p_2, \cdots, q, q_1, q_2, \cdots, r, s$

論理記号：$\bot, \wedge, \vee, \supset, \neg$

論理記号の結合の強さは，$\neg$ が最も強く，$\supset$ が最も弱いと約束して，そこからわかる結合の強さを示す括弧を省略する．論理式を表す記号として，P，Q，R，S を用い，論理式の有限集合を表す記号として Γ を用いる．

シークエントは

$$\Gamma \to P$$

の形の表現である．Γ をこのシークエントの左辺，P を右辺という．また，慣例に従い，混乱しない限り，

$$\{P, Q\} \cup \Gamma \to R$$

を

$$P, Q, \Gamma \to R$$

と表現する．一般の場合も同様に，左辺の”{”と”}”を省略し，$\cup$ を”,”と表記する．

シークエント $S, S_1, \cdots, S_n$ に対し

$$\frac{S_1 \cdots S_n}{S}$$

を推論規則という．S をこの推論規則の下式，各 S_i を上式という．SNK 公理，SNK 推論規則，SNK 証明図及び証明可能性の定義は佐々木 [1] に従う．また，

$$\frac{\Gamma \to P \quad \{Q\} \cup \Gamma \to R}{\{P \supset Q\} \cup \Gamma \to R}(\supset \text{左})$$

において，下式に現れる $P \supset Q$ を，この ($\supset$ 左) の主論理式という．

SNK で証明不可能であることを示すのに，以下の補助定理を用いる．

補助定理 1.1 次の２つは同値である．

(1) $P_1, \cdots, P_m \to Q$ が SNK で証明可能である．

(2) $P_1 \wedge \cdots \wedge P_m \supset Q$ がトートロジーである．

3　変形の定義

この節では，証明可能なシークエントから (I)，(II) を満たすシークエントを得るための基本的変形を挙げる．具体的には以下の８つの推論規則の上式から下式への変形と代入による変形である．これらの変形はどれも SNK での証明可能性を保存する．

対偶変形

$$\frac{P, \Gamma \to Q}{\neg Q, \Gamma \to \neg P}$$

ただし $P \notin \Gamma$ である．

($\wedge$左 $\uparrow$) 変形

$$\frac{P \wedge Q, \Gamma \to R}{P, Q, \Gamma \to R}$$

ただし $P \wedge Q \notin \Gamma$ である．

($\wedge$左 $\downarrow$) 変形

$$\frac{P, Q, \Gamma \to R}{P \wedge Q, \Gamma \to R}$$

ただし $P \notin \Gamma$，$Q \notin \Gamma$ である．

($\vee\neg$右 $\downarrow$) 変形

$$\frac{P, \Gamma \to Q}{\Gamma \to \neg P \vee Q}$$

ただし $P \notin \Gamma$ である．

($\vee$左 $\uparrow$) 変形

$$\frac{P \vee Q, \Gamma \to R}{P, \Gamma \to R}$$

ただし $P \vee Q \notin \Gamma$ である．

($\supset$ 左 $\uparrow$) 変形 A

$$\frac{P \supset Q, \Gamma \to R}{Q, \Gamma \to R}$$

ただし $P \supset Q \notin \Gamma$ である．

($\supset$ 左 $\uparrow$) **変形 B**

$$\frac{P \supset Q, \Gamma \to R}{\neg P, \Gamma \to R}$$

ただし $P \supset Q \notin \Gamma$ である．

($\vee$左 $\downarrow$) **変形**

$$\frac{P, \Gamma \to R}{P \vee Q, \neg Q, \Gamma \to R}$$

ただし $P \notin \Gamma$ である．

4　主に対偶変形を用いる例

以下は，証明可能なシークエントである．

$$p_1, p_1 \supset p_2, p_2 \supset p_3, \cdots, p_{n-1} \supset p_n \to p_n \tag{1}$$

$$p \vee q, p \supset r, q \supset r \to r \tag{2}$$

この節では (1)，(2) から対偶変形を用いて得られる例を挙げる．

例 4.1

$$\neg p_n, p_1 \supset p_2, p_2 \supset p_3, \cdots, p_{n-1} \supset p_n \to \neg p_1$$

解説　(1) を対偶変形すると導ける．また，このシークエントを下式とした ($\supset$ 左) の左の上式は

$$\neg p_n, p_1 \supset p_2, \cdots, p_{n-1} \supset p_n \to p_l$$

であり，補助定理 1.1 より証明不可能である．ただし，l は 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする．

例 4.2

$$\neg p_n, p_1, p_1 \supset p_2, p_2 \supset p_3, \cdots, p_{i-1} \supset p_i, p_{i+1} \supset p_{i+2}, \\ \cdots, p_{n-1} \supset p_n \to \neg(p_i \supset p_{i+1})$$

ただし，i は 1 以上 $n-2$ 以下の整数である．

解説　(1) を対偶変形すると導ける．また，このシークエントを下式とした ($\supset$ 左) の左の上式は

$$\neg p_n, p_1, p_1 \supset p_2, \cdots, p_{i-1} \supset p_i, p_{i+1} \supset p_{i+2}, \\ \cdots, p_{n-1} \supset p_n, \to p_m$$

であり，補助定理 1.1 より証明不可能である．ただし，m は i より大きく $n-1$ 以下の整数とする．

例 4.3

$$\neg r, p \supset r, q \supset r \to \neg(p \vee q)$$

解説　(2) を対偶変形すると導ける．また，このシークエントを下式として $p \supset r$ を主論理式とした ($\supset$ 左) の左の上式は

$$\neg r, q \supset r \to p$$

であり，補助定理 1.1 より証明不可能である．一方，$q \supset r$ を主論理式とした ($\supset$ 左) の左の上式は

$$\neg r, p \supset r \to q$$

であり，補助定理 1.1 よりこれも証明不可能である．

5　主に ($\vee\neg$右 $\downarrow$) 変形を用いる例

この節では証明可能なシークエントから，($\vee\neg$右 $\downarrow$) 変形を用いて得られる例を挙げる．

例 5.1

$$p \supset q \to \neg p \vee q$$

解説　このシークエントは，証明可能なシークエント $p, p \supset q \to q$ を ($\vee\neg$右 $\downarrow$) 変形すると導ける．また，このシークエントを下式とした ($\supset$ 左) の左の上式は

$$\to p$$

であり，補助定理 1.1 より証明不可能である．

例 5.2

$$p_1 \supset p_2, p_2 \supset p_3 \to \neg p_1 \vee p_3$$

解説　このシークエントは，4.1 節で挙げた (1) の $n = 3$ とした場合のシークエント $p_1, p_1 \supset p_2, p_2 \supset p_3 \to p_3$ を ($\vee\neg$右 $\downarrow$) 変形すると導ける．また，このシークエントを下式として $p_1 \supset p_2$ を主論理式とした ($\supset$ 左) の左の上式は

$$p_2 \supset p_3 \to p_1$$

であり, 補助定理 1.1 より証明不可能である．一方, $p_2 \supset p_3$ を主論理式とした ($\supset$ 左) の左の上式は

$$p_1 \supset p_2 \to p_2$$

であり，補助定理 1.1 よりこれも証明不可能である．

6　($\vee$左 $\downarrow$) 変形と ($\vee\neg$右 $\downarrow$) 変形を用いる例

この節では証明可能なシークエントから，($\vee$左 $\downarrow$) 変形と ($\vee\neg$右 $\downarrow$) 変形を用いて得られる例を挙げる．

例 6.1

$$p \vee q, p \supset r \to \neg(\neg q) \vee r$$

解説　このシークエントは，次の証明可能なシークエント

$$p, p \supset r \to r$$

を ($\vee$左 $\downarrow$) 変形したもの

$$p \vee q, \neg q, p \supset r \to r$$

を ($\vee\neg$右 $\downarrow$) 変形すると導ける．また，このシークエントを下式とした ($\supset$ 左) の左の上式は

$$p \vee q \to p$$

であり，補助定理 1.1 より証明不可能である．

参考文献

[1] 佐々木克巳：『シークエント体系の証明図から実証明を作る方法』，アカデミア　情報理工学部編　第 11 巻　南山大学，pp.　34–55，2011.