転がるコインの力学的シミュレーション

2009SE250 澤井優仁
指導教員：杉浦洋

1 はじめに

コインの転がる様子には様々なものがある，この様子についてコンピュータのシミュレーションで詳しく調べる．コインの運動を支配しているのは剛体力学である．本研究では剛体力学を詳しく学び，それによりコインの状態を表す微分方程式を導出する．その微分方程式を数値的に解くことにより，コンピュータ上にコインの運動を再現する．国枝 [1] を参考に運動方程式を導いた．[1] では加速度計の力学を用いるが，我々は慣性系の力学のみで導出を行った．全ての式は Mathematica の数式処理機能を用いて検算した．

2 三次元空間でのコイン

2.1 パラメータの設定

水平な床上を滑らない転がるコインの運動を解析する．コインは O を中心とする半径 a の円盤で，その厚さは無視する．直交座標系 $O-XYZ$ は，XY 軸は水平，Z 軸は鉛直の絶対座標である．また，$O-xyz$ はコインに伴って動く直交座標系で，z 軸はコインの裏面から表面に抜ける垂直軸，x 軸は常に水平と取る．y 軸は座標系 $O-xyz$ が右手系であることから自動的に決まる．Z 軸から z 軸への角度をθ，X 軸から x 軸への角度をψ，コインの z 軸周りの回転角をϕとする．

x, y, z 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ として，それぞれ絶対座標の数ベクトルで表すと．

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\psi \\ \cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$O-xyz$ 系の絶対座標系に対する角速度ベクトル$\boldsymbol{\Omega}$は

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} - \dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

コインの絶対座標系に対する角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$は

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j} + (\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{k}. \tag{3}$$

x, y, z 軸周りのコインの慣性モーメントを A, A, C とすると，コインの角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = A\dot{\theta}\boldsymbol{i} + A\dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j} + C(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

系に入る外力は，鉛直下向きの重力と，コインと床との間に働く拘束力の二つである．コインの質量を m，拘束力を $\boldsymbol{F}$ とすると，二つの外力は

$$-mg\boldsymbol{e}_3 = -mg(\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}), \tag{5}$$
$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}. \tag{6}$$

重心 O の速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とし，コインの半径を a とする．以上の三式を用いると，速度ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= a\dot{\theta}\boldsymbol{k} - a\dot{\phi}\boldsymbol{i} + a\dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{i} \\ &= -a(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{i} + a\dot{\theta}\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{7}$$

2.2 運動方程式の導出

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の時間微分を絶対座標で表すと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{i} &= \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\psi \\ \dot{\psi}\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{j} - \dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{j} &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}\sin\theta\sin\psi - \dot{\psi}\cos\theta\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi - \dot{\psi}\cos\theta\sin\psi \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{k} &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\psi \\ -\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{i} - \dot{\theta}\boldsymbol{j}. \end{aligned} \tag{10}$$

(7), (8), (9), (10) より，速度を微分すると

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{v}} &= (-a\ddot{\phi} - a\ddot{\psi}\cos\theta + 2a\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)\boldsymbol{i} \\ &\quad + \{-a\dot{\theta}^2 - a\dot{\psi}\cos\theta(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\}\boldsymbol{j} \\ &\quad + \{a\ddot{\theta} + a\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\}\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{11}$$

ゆえに，重心の並進運動の方程式は以下のようになる．

$$\begin{cases} -ma(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - 2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta) = F_x, \\ -ma\{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}\cos\theta(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\} = F_y - mg\sin\theta, \\ ma\{\ddot{\theta} + \dot{\psi}\sin\theta(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\} = F_z - mg\cos\theta. \end{cases} \tag{12}$$

(4), (8), (9), (10) より，同様にコインの角運動量を微分すると

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{L}} &= \{A\ddot{\theta} + A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + C\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\}\boldsymbol{i} \\ &\quad + \{A\ddot{\psi}\sin\theta + 2A\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - C\dot{\theta}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\}\boldsymbol{j} \\ &\quad + \{C(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)\}\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{13}$$

一方，外力のモーメントを $\boldsymbol{N}$ とすると

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N} = -a\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{F} = F_x a\boldsymbol{k} - F_z a\boldsymbol{i} \tag{14}$$

重心回りの回転運動の方程式は，

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} + A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + C\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta) = -F_z a, \\ A\ddot{\psi}\sin\theta + 2A\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - C\dot{\theta}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta) = 0, \\ C(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta) = F_x a. \end{cases} \tag{15}$$

(12), (15) より，拘束力を消去して

$$\begin{cases} (C+ma^2)(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)=ma^2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta, \\ A\ddot{\psi}\sin\theta+2A\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta-C\dot{\theta}(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta)=0, \\ (A+ma^2)\ddot{\theta}-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ +(C+ma^2)\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta)+mga\cos\theta=0. \end{cases} \tag{16}$$

以上の計算式はMathematicaでプログラムを組んで検算した。

3　Mathematica による数値実験

三次元でのコインの転がるシミュレーションを Mathematica 上に実現し，数値実験を行った．重心の絶対座標を $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ とし，微分方程式 (7), (16) を連立させて解く．m=1，a=1，A=$ma^2/4$=1/4，C=$ma^2/2=1/2$ とする．

3.1　歳差運動

いくつかの実験の中から，2 つの典型例を紹介する．いずれの例でも，検算のためにエネルギーを計算したが，計算精度の範囲内で保存された．以下の初期値を指定する．それ以外は 0 とする．

$$\theta=\frac{\pi}{3},\quad \dot{\phi}=\frac{3\pi}{2},\quad \dot{\psi}=-0.868,\quad z=a\sin\frac{\pi}{3}$$

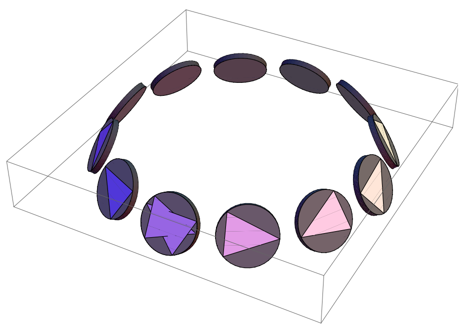

図 1　コインの運動モデル

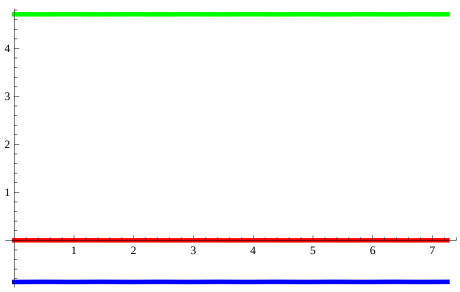

図 2　変数の値

(図 2) の変数は上から$\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi}$である．この 3 変数の値は一定となっており，$\dot{\theta}$の値は常に 0 であることから，コインはぶれがなく動いていることが分かる．コインの運動 (図 1) は周期的なものとなった．

3.2　ふらつきを伴う運動

以下の初期値を指定する．それ以外は 0 とする．

$$\theta=\frac{\pi}{2.001},\quad \dot{\theta}=3.07,\quad \dot{\phi}=1.805,$$
$$\dot{\psi}=-0.003,\quad z=a\sin\frac{\pi}{2.001}$$

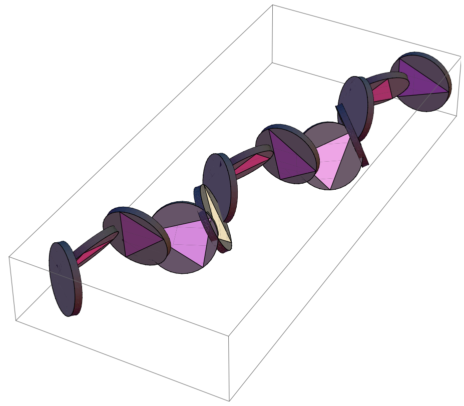

図 3　コインの運動モデル

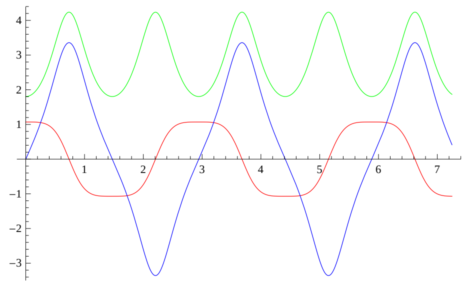

図 4　変数の値

(図 4) は$\dot{\theta},\dot{\phi},\dot{\psi}$のグラフであり，それぞれ一定の周期で変化をしているため，このコインの運動 (図 3) は周期的な運動を行っていることが分かる．

4　終わりに

本研究では，コインの状態を表す微分方程式を導出した．Mathematica でプログラムを組み，その微分方程式を数値的に解くことにより，コンピュータ上にコインの運動を再現した．初期値によって周期的に円運動を行うコインの動きを再現したり，ふらつきがありながらも周期的な運動を行うコインの動きを再現することができた．

参考文献

[1] 国枝正春：『6 運動自由度系の力学』. http://ds0.cc.yamaguchi-u.ac.jp/ tsaito/Advanced/PDF/advibration01.pdf.