実証明とシークエント

2010SE029 古田佳奈

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

3 年次の情報システム数理演習 I,II でシークエント体系を学び，証明の手順を理解することができた．そこで実際に問題を解くために活用したいと思った．本研究の目的は，集合に関する性質の証明の理解を，シークエント体系の証明図の作成を通して深めることである．具体的な性質は次の分配律である．

性質 1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

性質 2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

卒業論文では，12 冊の文献 [1–3,5–6,8–14] から証明を抽出し，それらを体系 SNK に基づいた方法で表現し，その証明図で用いられた SNK 推論規則の各組について，対応する日本語表現を抜き出した．本稿では，4 節でこのうちの日本語表現について述べ，3 節で [14] の証明の SNK の表現を示す．2 節は体系 SNK の導入である．

2 シークエント体系 SNK

この節では，本研究で用いる体系 SNK について述べる．体系 SNK の定義は基本的に文献 [7] に従う．以下，集合を表す記号として，A, B, C を用いる．文献 [7] では，文 P_1 が文 P_2 により定義されているとき

$$\frac{P_2, \Gamma \to Q}{P_1, \Gamma \to Q}, \quad \frac{\Gamma \to P_2}{\Gamma \to P_1} \tag{1}$$

の 2 つの SNK 推論規則 $(Def.)$ を導入している．P_1, P_2 の具体的な関係は表 1 に定める．表 1 には，各 P_1, P_2 に対応する推論規則の名前も記しておく．

表 1：$Def.$

推論規則	P_1	P_2
$Def.\subseteq$	$A \subseteq B$	$\forall x(x \in A \supset x \in B)$
$Def.=$	$A = B$	$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
$Def.\cap$	$x \in A \cap B$	$x \in A \wedge x \in B$
$Def.\cup$	$x \in A \cup B$	$x \in A \vee x \in B$

また，2 つの $(Def.)$ は次の形でも用いる．

$$\frac{P[P_2/P_1], \Gamma \to Q}{P, \Gamma \to Q} \qquad \frac{\Gamma \to P[P_2/P_1]}{\Gamma \to Q} \tag{2}$$

ここで $P[P_2/P_1]$ は，P に現れる P_1を P_2 でおきかえて得られる文である．

3 性質の証明

卒業論文では，12 冊の文献から証明図を作成した．この節では，そのうちの [14] における性質 2(右辺) $\subseteq$ (左辺) の証明を，体系 SNK に基づいた図で表現する．[14] の証明文を以下に，SNK の表現を図 1 に示す．なお，SNK の表現については [4] を参照した．

証明文 ([14])

$(A{\cup}B){\cap}(A{\cup}C) \subseteq A{\cup}(B{\cap}C)$: $x \in (A{\cup}B){\cap}(A{\cup}C)$ ならら $x \in A \cup B$，$x \in A \cup C$．$x \in A \cup B$ だから $x \in A$ か $x \in B$．$x \in A$ なるときは $x \in A \cup (B \cap C)$．$x \notin A$ なるときは $x \in B$．しかるに，$x \in A{\cup}C$ だから $x \in A$ か $x \in C$．しかも $x \notin A$ なのだから，どうしても，$x \in C$．よって，$x \in B$，$x \in C$，すなわち $x \in B{\cap}C$．ゆえに，$x \in A{\cup}(B{\cap}C)$．よって，$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

4 推論規則

この節では，集めた証明図における SNK 推論規則の各組について，対応する様々な日本語表現を抜き出す．

[推論規則] $(Def.\subseteq), (\to \forall \supset)$ の組

[例]

$$\frac{x \in (A \cup B) \cap C \to x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)}{\to (A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)}$$

[日本語表現]

- $x \in (A \cup B) \cap C$ となる x を任意にとると，〜. [8]
- $x \in (A \cup B) \cap C$ とします. [1], [2], [5], [10]
- $x \in (A \cup B) \cap C$ ならば〜. [12], [14]

[推論規則] $(Def.\cap)$(左)

[例]

$$\frac{x \in A \wedge x \in B \cup C \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}{x \in A \cap (B \cup C) \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

[日本語表現]

- $\cap$の定義から，$x \in A$ かつ $x \in B$ となる. [1]
- $x \in A$ かつ $x \in B$ である. [2], [3], [5], [6], [8], [10], [12]
- $x \in A$ であり，同時に $x \in B$ でもある. [2]
- $x \in A$ でしかも $x \in B$. [14]

[推論規則] $(Def.\cap)$(右)

[例]

$$\frac{(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \to x \in A \wedge x \in (B \cup C)}{(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \to x \in A \cap (B \cup C)}$$

[日本語表現]

- $x \in A$ かつ $x \in (B \cup C)$．結局，$x \in A \cap (B \cup C)$. [1]
- $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$．よって $x \in A \cap (B \cup C)$. [2], [5]
- $x \in A, x \in (B \cup C)$．ゆえに $x \in A \cap (B \cup C)$. [14]

[推論規則] $(Def.\cup)$(左)

[例]

$$\frac{x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \to x \in A \cap (B \cup C)}{x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \to x \in A \cap (B \cup C)}$$

[日本語表現]

- $\cup$の定義から $x \in (A \cap B)$ または $x \in (A \cap C)$. [1]

- $x \in A$ あるいは $x \in B$. [8]
- $x \in A$ または $x \in B$. [2], [3], [5], [6], [12]
- $x \in A$ か $x \in B$. [14]

[推論規則]　$(Def.\cup)$(右)
[例]

$$\frac{x \in B \wedge x \in C \to x \in A \vee x \in B}{x \in B \wedge x \in C \to x \in A \cup B}$$

[日本語表現]
- $x \in A$ あるいは $x \in B$ となるので $x \in A \cup B$ となる. [8]
- $x \in A$ または $x \in B$ である．したがって，$x \in A \cup B$. [1], [10]
- $x \in A$ であるか，または $x \in B$ であるかのどちらかである．従って $x \in A \cup B$ となる．[2]

[推論規則]　$(\vee \to)$
[例]

$$\frac{x \in A \to P \quad x \in B \cap C \to P}{x \in A \vee x \in (B \cap C) \to P}$$

ただし，P は $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ の略記である．

[日本語表現]
- もし $x \in A$ ならば, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ となり，$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ である．一方，$x \in B \cap C$ ならば $x \in B$ かつ $x \in C$ となり，従って $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ となる．[2]
- $x \in A$ の場合，〜．また，$x \in B$ の場合，〜．[8]
- $x \in A$ のとき〜．(一方で,)$x \in B$ のとき〜．[5], [14]
- $x \in A$ のときは〜であり $x \in B$ のときは〜である．[12]

[推論規則]　$(\to \wedge), (Def.\cap)$ の組
[例]

$$\frac{(Def.\cap, \to \wedge)}{x \in A, x \in C \to x \in A \cap C}$$

[日本語表現]
- $x \in A$ の場合, $x \in C$ であることと合わせると $x \in A \cap C$ が従う．[8]
- 〜は, $x \in A$ を意味します．同じ理由によって $x \in B$ です．したがって $x \in A \cap B$ です．[5]
- $x \in A$ であり，同時に $x \in B$ である．従って $x \in A \cap B$ となる．[2]

[推論規則]　(背中律)
[例]

$$\frac{x \in A, P \to x \in A \cup (B \cap C) \quad x \notin A, P \to x \in A \cup (B \cap C)}{P \to x \in A \cup (B \cap C)}$$

ただし，P は $x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ の略記である．
[日本語表現]
- $x \in A$ とすると $x \in A \cup (B \cap C)$ である．$x \notin A$ とすると，$x \in B$ かつ $x \in C$ であり，$x \in A \cup (B \cap C)$ である．[1]
- $x \in A$ のとき〜です．よって，$x \notin A$ を仮定できます．[5]
- $x \in A$ なるときは $x \in A \cup (B \cap C)$. $x \notin A$ なるときは $x \in B$. [14]

参考文献

[1] 一樂重雄 :『集合と位相 そのまま使える答えの書き方』．講談社，東京，2001.

[2] 内田伏一 :『集合と位相』．裳華房，東京，1986.

[3] 梅垣壽春 他 2 名 :『集合・位相・距離』．共立出版，東京，1999.

[4] 加藤あや美，佐々木克巳 :「形式体系に基づく実証明の分析」,『アカデミア 情報理工学編 第 12 巻』．2012，pp.1–24.

[5] ゲアリー・チャートランド 他 2 名 :『証明の楽しみ・基礎編』．ピアソン・エデュケーション，東京，2004.

[6] 佐久間一浩 :『集合・位相』．共立出版，東京，2004.

[7] 佐々木克巳:「シークエント体系の証明図から実証明を作る方法」,『アカデミア 情報理工学編 第 11 巻』．2011，pp.35–54.

[8] 庄田敏宏 :『集合・位相に親しむ』．現代数学社，京都，2010.

[9] 鈴木晋一 :『集合と位相への入門』．サイエンス社，東京，2003.

[10] 瀬山士郎 :『集合・位相』．講談社，東京，2001.

[11] 竹之内脩 :『入門 集合と位相』．実教出版，東京，1971.

[12] 日本大学文理学部数学科 :『数学基礎セミナー』．日本評論社，東京，2003.

[13] 細井勉 :『集合・論理』．共立出版，東京，2011.

[14] 吉田洋一 :『点集合論入門』．培風館，東京，1982.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\to \vee)}{x \in A \to x \in A \cup (B \cap C)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(Def.\cap), (\to \wedge)}{x \in B, x \in C \to x \in B \cap C}}{x \in B, x \in C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(Def.\cup), (\to \vee_2)}{x \notin A, x \in B, x \in A \vee x \in C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(\text{選言三段論法})}{x \notin A, x \in B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(Def.\cup)}{x \notin A, x \in A \vee x \in B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(\text{選言三段論法})}{\dfrac{x \in A \vee x \in B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C)}{\dfrac{x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C)}{\dfrac{x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \to x \in A \cup (B \cap C)}{\to (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)}\,(Def.\subseteq), (\to \forall \supset)}\,(Def.\cap)}\,(Def.\cup)}\,(\text{背中律})$$

図 1 : 対応する証明図 [14]