時間論理 $\mathbf{K}_t$ の完全性

2010SE082 片桐真秀
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

数理論理学を学ぶにつれて，古典論理では表現できない必然性や可能性といった，様相についての論理関係の表現を可能にした様相論理について興味を持った．それらの様相論理の中でも，様相に対して時間的な解釈を与えた時間論理について特に興味を持った．

本研究では，小野 [1] をもとに，時間論理について理解を深めた．具体的には，小野 [1] 第 4 章第 6 節の定理や問について証明や解答を与えながら，時間論理 K_t における完全性を理解した．本稿では，この完全性の証明の一部を示す．なお，小野 [1] では，この完全性の証明は問として扱われている．

2　時間論理 $\mathbf{K}_t$

この節では，小野 [1] にしたがって，時間論理の体系 K_t と，クリプキによるセマンティクスを導入する．

まず，体系 K_t を定義する．時間論理で用いられる様相記号は $[P]$ と $[F]$ であり，$[P]A$ と $[F]A$ をそれぞれ「過去においていつも A」,「未来においていつも A」と解釈する．

定義 2.1　時間論理の論理式

(1) それぞれの命題変数は論理式である．

(2)A,B がともに論理式ならば $(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \supset B)$,$(\neg A)$,$([P]A)$,$([F]A)$ はいずれも論理式である．

小野 [1] では，K_t を，式を基本概念として定義している．式とは $A_1, \cdots, A_m \rightarrow B_1, \cdots, B_n$ という形をした表現である．ただし，各々の A_i および B_j は論理式である．K_t のもとになる古典命題論理の体系 LK の定義も小野 [1] に従う．

定義 2.2　体系 $\mathbf{K}_t$

体系 K_t は，LK につぎの 4 つの公理 (i),(ii),(iii),(iv) をつけ加え，さらに $[P]$ と $[F]$ に関するつぎの 2 つの推論規則 (I),(II) をつけ加えて得られる体系である．

(i)　$A \supset [P]\neg[F]\neg A$

(ii)　$A \supset [F]\neg[P]\neg A$

(iii)　$[P]A \supset [P][P]A$

(iv)　$[F]A \supset [F][F]A$

(I)　$\dfrac{A_1, \cdots, A_m \rightarrow A}{[P]A_1, \cdots, [P]A_m \rightarrow [P]A}$

(II)　$\dfrac{A_1, \cdots, A_m \rightarrow A}{[F]A_1, \cdots, [F]A_m \rightarrow [F]A}$

次に，クリプキによるセマンティクスにより，論理式と式の恒真性を定義する．

定義 2.3　$\mathbf{K}_t$ フレーム

空でない集合 M と M 上の二項関係 R の対 (M, R) を K_t フレームという．

定義 2.4　$\mathbf{K}_t$ モデル

(M, R) を K_t フレームとする．また，V を，各命題変数 p に対し $V(p) \subseteq M$ となるような写像とする．R と V を用いて，M の要素と論理式の間の二項関係 $\models$ を帰納的に定義する．本稿では，論理式が命題変数,$[P]A$,$[F]A$ の形の場合のみを示す．そのほかの場合は小野 [1] に従う．

(1) $a \models p \Leftrightarrow a \in V(p)$

(6) $a \models [P]A \Leftrightarrow bRa$ となるすべての b に対し $b \models A$

(7) $a \models [F]A \Leftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$

この $\models$ を付値といい，$(M, R, \models)$ のことを K_t モデルという．さらに，「$a \models A$ でない」ことは $a \not\models A$ と表す．

定義 2.5　恒真な論理式

K_t フレーム (M, R) 上の任意の付値 $\models$ と M の任意の要素 a に対して $a \models A$ となるとき，論理式 A は (M, R) で恒真であるという．また，論理式 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \cdots \vee B_n)$ が恒真であるとき，式 $A_1, \cdots, A_m \rightarrow B_1, \cdots, B_n$ は恒真であるという．

3　時間論理 $\mathbf{K}_t$ の完全性

小野 [1] では，次の完全性の証明を問 4.24 としている．この節では，この完全性の証明を行う．健全性 (必要性) の証明は卒業論文では示したが，本稿では省略する．

定理 3.1　$\mathbf{K}_t$ の完全性

任意の式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ に対し，$\Gamma \rightarrow \Delta$ が K_t で証明可能となるための必要十分条件は $\Gamma \rightarrow \Delta$ が任意の K_t フレームで恒真となることである．

定理 3.1 の十分性を証明するため，極大無矛盾な対と，カノニカルなクリプキ・モデルを導入する．

定義 3.2 無矛盾な対

時間論理の論理式全体の集合を Φ とする．Φ の部分集合 U と V の対 (U, V) が K_t で無矛盾であるとは，U に属する有限個の論理式 $A_1, \cdots, A_m$ と V に属する有限個の論理式 $B_1, \cdots, B_n$ をどのように選んでも K_t で式

$$A_1, \cdots, A_m \rightarrow B_1, \cdots, B_n$$

が証明不可能であることとする．そうでないとき，(U, V)

は K_t で矛盾するという．また，対 (U, V) が無矛盾であり，さらに $U \cup V = \Phi$ であるとき (U, V) は K_t で極大無矛盾であるという．

補助定理 3.3

対 (U_0, V_0) が K_t で無矛盾なとき，$U_0 \subseteq U$ かつ $V_0 \subseteq V$ となる Φ の部分集合 U と V が存在して，(U, V) は K_t で極大無矛盾になる．すなわち，任意の無矛盾な対は極大無矛盾な対にまで拡張できる．

この補助定理は，小野 [1] の証明を補う形で卒業論文に示した．

定義 3.4 カノニカルなクリプキ・モデル

K_t のカノニカルなクリプキ・モデル $(M_{\mathrm{K_t}}, R_{\mathrm{K_t}}, \models_{\mathrm{K_t}})$ をつぎのように定める．

(1) $M_{\mathrm{K_t}} = \{\, U(\subseteq \Phi) \mid (U, \Phi - U)$ は K_t で極大無矛盾 $\}$

(2) $U_1 R_{\mathrm{K_t}} U_2 \Leftrightarrow (U_1)_{[F]} \subseteq U_2$ かつ $(U_2)_{[P]} \subseteq U_1$

(3) $U \models_{\mathrm{K_t}} p \Leftrightarrow p \in U$

ただし，$U, U_1, U_2, \in M_{\mathrm{K_t}}$ であり，

$U_{[P]} = \{A \mid [P]A \in U\}$,

$U_{[F]} = \{A \mid [F]A \in U\}$

である．

次に，極大無矛盾な対とカノニカルなクリプキ・モデルの性質をいくつか示す．

補助定理 3.5

$U \in M_{\mathrm{K_t}}$ のとき，つぎの (1),(2) がなりたつ．

(1) $A_1, \cdots, A_m$ が U に属し，式 $A_1, \cdots, A_m \to B$ が K_t で証明可能ならば，B も U に属する．

(2) A に対し，A か $\neg A$ のどちらか一方のみが U に属する．

この補助定理は，小野 [1] の補助定理 4.9 と同様に示される．

補助定理 3.6

集合 U が M_{K_t} の要素であるとき，つぎの (1) から (6) がなりたつ．

(1) $A \wedge B \in U \Leftrightarrow A \in U$ かつ $B \in U$

(2) $A \vee B \in U \Leftrightarrow A \in U$ または $B \in U$

(3) $A \supset B \in U \Leftrightarrow A \notin U$ または $B \in U$

(4) $\neg A \in U \Leftrightarrow A \notin U$

(5) $[P]A \in U \Leftrightarrow U' R_{\mathrm{K_t}} U$ となる任意の $U'(\in M_{\mathrm{K_t}})$ に対して $A \in U'$

(6) $[F]A \in U \Leftrightarrow U R_{\mathrm{K_t}} U'$ となる任意の $U'(\in M_{\mathrm{K_t}})$ に対して $A \in U'$

(1) から (4) は，小野 [1] の正規な様相論理に対する同様の性質についての記述と同様に示される．(5),(6) の証明は，卒業論文で，公理 (i) と推論規則 (I)，公理 (ii) と推論規則 (II) を用いてそれぞれ示したが，本稿では省略する．

補助定理 3.7

K_t のカノニカルなクリプキ・モデルは K_t モデルである．

この補助定理の証明は，$R_{\mathrm{K_t}}$ が推移的であることを確かめればよい．卒業論文では，公理 (iii), 公理 (iv) を用いてこの推移性を示したが，本稿では省略する．

カノニカルなクリプキ・モデルの定義と補助定理 3.6 を使うと，A の構成に関する帰納法で次のことが示される．

補助定理 3.8

任意の $U(\in M_{\mathrm{K_t}})$ と任意の論理式 A に対し，

$$U \models_{\mathrm{K_t}} A \Leftrightarrow A \in U$$

である．

[定理 3.1 の十分性の証明]

$A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$ は任意の K_t フレームで恒真であり，さらに，$A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$ が K_t で証明可能でないとする．すると，対 $(\{A_1, \cdots, A_m\}, \{B_1, \cdots, B_n\})$ は K_t で無矛盾になる．補助定理 3.3 を使うと，K_t で極大無矛盾である対 (U, V) が存在し，$\{A_1, \cdots, A_m\} \subseteq U$ かつ $\{B_1, \cdots, B_n\} \subseteq V$ となる．したがって，K_t のカノニカルなクリプキ・モデル $(M_{\mathrm{K_t}}, R_{\mathrm{K_t}}, \models_{\mathrm{K_t}})$ を考えると，$U \in M_{\mathrm{K_t}}$ であり補助定理 3.8 から，$U \models_{\mathrm{K_t}} A_i \ \ (i = 1, \cdots, m)$，$U \not\models_{\mathrm{K_t}} B_j \ \ (j = 1, \cdots, n)$ が得られる．したがって，

$$U \not\models_{\mathrm{K_t}} (A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \cdots \vee B_n)$$

となる．一方，補助定理 3.7 より，$(M_{\mathrm{K_t}}, R_{\mathrm{K_t}}, \models_{\mathrm{K_t}})$ は K_t モデルである．これらは $A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$ が任意の K_t フレームで恒真であるという仮定に反する． ■

4 おわりに

本研究により，時間論理とその完全性定理について一定の理解を得ることができた．今後は，様相論理や時間論理の性質や構造についてより深く研究をしていきたい．

参考文献

[1] 小野 寛晰：「情報科学における論理」．日本評論社，東京, 2010.

[2] 佐々木 克巳：「シークエント体系の証明図から実証明を作る方法」．アカデミア情報理工学編第 11 巻，pp.35-54，2011.