

# 摩擦係数の変動を考慮した ABS のゲインスケジューリング制御

2010SE083 片岡 寛

指導教員：高見 勲

## 1 はじめに

ABS は摩擦係数と横抗力が共に高い理想的なスリップ率 0.2 を保つことにより車輪のロックを防ぐ。本研究では路面状態によって変動する摩擦係数をポリトープ表現を用いてロバスト安定性を保証し、保証した範囲内でスリップ率を 0.2 に安定化させる。また、時変パラメータである車体速度を考慮したパラメータ依存リアプノフ関数に基づくゲインスケジューリング制御系設計を行う。

## 2 モデリング

本研究で用いる ABS 装置を図 1 に示す。今回の研究では車体速度  $V[\text{km/h}]$  が  $10 \leq V \leq 50$  の範囲のとき上の車輪にかかるブレーキングトルク  $\tau_1$  を操作し、車輪間の摩擦係数である  $\mu$  を  $0.1 \leq \mu \leq 0.7$  の範囲内でスリップ率  $\lambda$  を目標値 0.2 に追従させる制御則を設計する。上の車輪の角速度、下の車輪の角速度を  $\omega_1(t), \omega_2(t)$ 、上の車輪、下の車輪の半径を  $r_1, r_2$ 、バランスレバーの回転軸から車輪間の接点までの距離を  $L$ 、線分  $L$  と車輪間の接点の法線との角度を  $\phi$  とする。また、以下から角速度  $\omega_1(t), \omega_2(t)$  の (t) は省略する。上の車輪、下の車輪の角加速度の回転運動方程式とスリップ率を次のように示す。

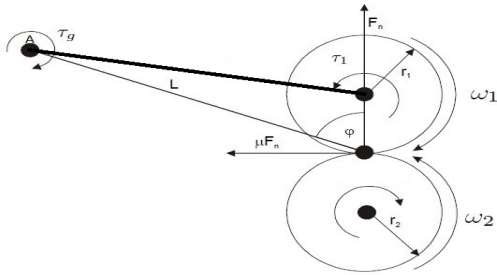


図 1 ABS 実験機の簡略図

$$J_1 \dot{\omega}_1 = F_n r_1 \mu - \tau_1 \quad (1)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = -F_n r_2 \mu \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{r_2 \omega_2 - r_1 \omega_1}{r_2 \omega_2} \quad (3)$$

式 (1),(2),(3) から導出される非線形のスリップ率の微分方程式を平衡点  $(\lambda^*, \tau_1^*)$  の周りで線形化 [1] し、(4) を得る。

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\omega_2} \frac{b_{11}s(\mu)^2 + b_{12}s(\mu) + b_{13}}{a_{11}s(\mu) + a_{12}} (\lambda - \lambda^*) + \frac{s(\mu)b_{31} + b_{32}}{\omega_2} (\tau_1 - \tau_1^*) \quad (4)$$

ここで  $s(\mu)$  は次式のようになる。

$$s(\mu) = \frac{\mu}{L(\sin(\phi) - \mu \cos(\phi))}$$

## 3 ディスクリプタ表現

本研究では出力を目標値に追従させるために制御ループ内に積分器を状態変数に入れた。拡大系の状態変数を  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [\int(\lambda - \lambda^*)dt \ \lambda - \lambda^*]^T$ 、 $u(t) = \tau_1 - \tau_1^*$  とする。ディスクリプタ変数を  $x_d(t) = [x(t) \ \dot{\lambda} \ u(t)]^T$  とすることで、ディスクリプタ表現を用いた状態方程式は式 (5) となる。

$$E_d \dot{x}_d(t) = A_d(\omega_2)x_d(t) + B_d u(t) \quad (5)$$

$$A_d(\omega_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_1 & -a_1 \omega_2 & a_1 b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_d = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

$$b_1 = b_{11}s(\mu)^2 + b_{12}s(\mu) + b_{13}$$

$$b_3 = b_{31}s(\mu) + b_{32}, a_1 = a_{11}s(\mu) + a_{12}$$

$s(\mu)$  に変動パラメータである摩擦係数が含まれているので、 $s(\mu)$  を変動パラメータとして扱う。  $b_1, b_2, b_3, a_3$  は  $s(\mu)$  を含む変数であり変動パラメータである。  $b_{1p}, b_{3q}, a_{1q}$  ( $p = 1, 2, 3 \ q = 1, 2$ ) は定数である。式 (5) 内では変動パラメータを行列  $A_d(\omega_2)$  内に集約できているが変動パラメータである  $s(\mu)^2$  が存在する。LFT を用いて  $s(\mu)^2$  をアフィンな形で取り出す。

## 4 線形分数変換 (LFT)

行列  $A_n$  を  $A_d(\omega_2)$  の変動パラメータを含まない項、 $\Delta$  を LFT 形式のスケジューリングパラメータとする。行列  $A_d(\omega_2)$  が

$$A_d(\omega_2) = A_n + B_\delta \Delta C_\delta \quad (6)$$

となるような  $B_\delta, C_\delta, \Delta$  を定めることで式 (6) は式 (7) で表される。

$$E_d \dot{x}_d(t) = A_n x_d(t) + B_\delta \omega_\delta + B_d u(t) \quad (7)$$

$$Z_\delta(t) = C_\delta x_d(t)$$

$$\omega_\delta = \Delta Z_\delta(t)$$

式 (7) を元に  $A_d(\omega_2)$  のスケジューリングパラメータを取り出す。変動パラメータである  $s(\mu)^2$  に対して LFT を行い、新たにディスクリプタ変数を  $\tilde{x}_d(t) = [x_d(t) \ Z_\delta]^T$  と与えることで LFT を行ったディスクリプタ表現を用いた

状態方程式は式 (8) となる.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_d \dot{\tilde{x}}_d(t) &= \tilde{A}_d(\omega_2) \tilde{x}_d(t) + \tilde{B}_d u(t) \quad (8) \\ \tilde{A}_d(\omega_2) &= \begin{bmatrix} A_n & B_\delta \Delta \\ C_\delta & -I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{n11} & A_{n12} & B_{\delta 1} \Delta \\ A_{n21} & A_{n22} & B_{\delta 2} \Delta \\ C_{\delta 1} & C_{\delta 2} & D_\delta \Delta - I \end{bmatrix} \quad (9) \\ \tilde{E}_d &= \begin{bmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Delta &= s(\mu) \end{aligned}$$

パラメータ依存リアプノフ関数を扱うために  $\dot{\omega}_2$  を含むスケジューリングパラメータ  $\omega_2, \dot{\omega}_2$  の上下界を頂点とするパラメータボックスを式 (9) で与える.

$$\begin{aligned} \Theta &= \{\theta = [\theta_1, \theta_2]^T : \theta_i \in \{\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}\} \quad (10) \\ \theta_1 &= \omega_2, \theta_2 = \dot{\omega}_2 (i = 1, 2) \end{aligned}$$

## 5 LMI 定式化

本研究では, システムの状態フィードバックコントローラ  $u(t) = K(\theta)x(t)$  を用いる.  $Q$  を拡大系の状態変数に対する重み行列,  $R$  は入力に対する重みである. 次式で表される評価関数  $J$  を

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (11)$$

定義し, 評価関数  $J$  の最小化を行う. ここで, 行列  $\tilde{E}_d$  の構造を考慮してリアプノフ行列  $\tilde{X}_d(\theta)$ , 変換行列  $\tilde{Y}_d(\theta)$ , 状態フィードバックゲイン  $\tilde{K}_d(\theta)$  は

$$\tilde{X}_d(\theta) = \begin{bmatrix} X(\theta) & 0 & 0 \\ X_{21}(\theta) & X_{22}(\theta) & X_{23}(\theta) \\ X_{31}(\theta) & X_{32}(\theta) & X_{33}(\theta) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\tilde{Y}_d(\theta) = [Y(\theta) \ 0 \ 0] \quad (13)$$

$$\tilde{K}_d(\theta) = [K(\theta) \ 0 \ 0] \quad (14)$$

となる. 行列  $\tilde{A}_{d2}(\theta), \tilde{X}_d(\theta), X(\theta), \tilde{Y}_d(\theta), Y(\theta), \dot{\tilde{X}}_d(\theta)$  はスケジューリングパラメータに対してアフィンであるので以下のパラメータボックス頂点  $\Theta_j$  で端点行列として表現できる. また式 (16) という制約を加える.

$$X(\theta) = X_0 + \theta_1 X_1 \quad (15)$$

$$\tilde{X}_d(\theta) = \tilde{X}_{d0} + \theta_1 \tilde{X}_{d1} \quad (16)$$

$$Y(\theta) = Y_0 + \theta_1 Y_1 \quad (17)$$

$$\tilde{Y}_d(\theta) = \tilde{Y}_{d0} + \theta_1 \tilde{Y}_{d1} \quad (18)$$

$$\dot{\tilde{X}}_d = \tilde{X}_d(\dot{\theta}) - \dot{\tilde{X}}_{d0} \quad (19)$$

$$\tilde{E}_d \dot{\tilde{X}}_d(\theta) = X(\dot{\theta}) - X_0 \quad (20)$$

$$A_{n22} [X_{21,1} \ X_{22,1} \ X_{23,1}] = 0 \quad (21)$$

$$\Theta_1 = (\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2), \Theta_2 = (\bar{\theta}_1, \underline{\theta}_2), \Theta_3 = (\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_2), \Theta_4 = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$$

摩擦係数の変動をポリトープ表現を用いて保証する.  $s(\mu)$  が最小のときの  $\tilde{A}_d(\Theta_j)$  を  $\tilde{A}_{de0}(\Theta_j)$ ,  $s(\mu)$  が最大値のときの  $\tilde{A}_d(\Theta_j)$  を  $\tilde{A}_{de1}(\Theta_j)$  とする. また, LQ制御に基づく LMI 条件は次のように表される.

$$\begin{aligned} & X_{11}(\Theta_j) \succ 0 \\ & \begin{bmatrix} He[\tilde{A}_{dei}(\Theta_j) \tilde{X}_d + \tilde{B}_d \tilde{Y}_d] - \tilde{E}_d \dot{\tilde{X}}_d & (Q^{\frac{1}{2}} \tilde{X}_d)^T & \tilde{Y}_d^T (R^{\frac{1}{2}})^T \\ Q^{\frac{1}{2}} \tilde{X}_d & -I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \tilde{Y}_d & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0 \\ & \begin{bmatrix} Z & I \\ I & X(\Theta_j) \end{bmatrix} \prec 0 \\ & \text{trace}(Z) \prec \gamma \\ & (i = 0, 1) \quad (j = 1, \dots, 4) \end{aligned}$$

上の LMI を解き,  $\gamma$  を最小化することで状態フィードバック GS コントローラ

$$\tilde{K}_d(\theta) = [Y(\theta)X(\theta)^{-1} \ 0 \ 0] \quad (22)$$

を得ることができる. そして現在の路面  $\mu=0.17$  において実験を行う.

## 6 実験, 考察

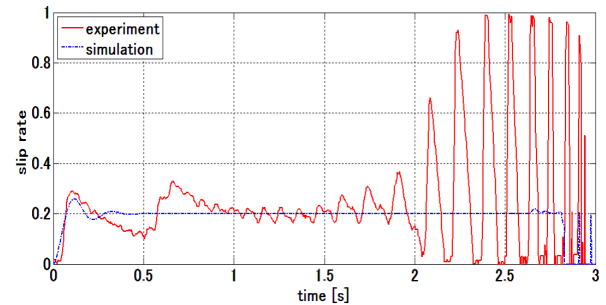


図2 スリップ率

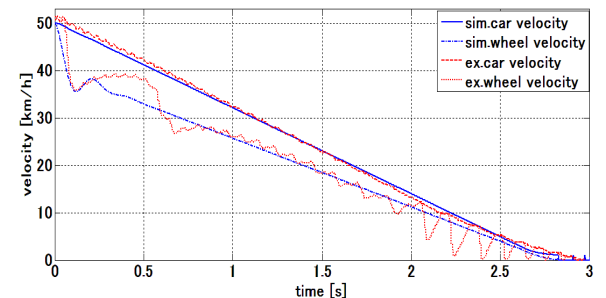


図3 車体, 車輪速度

シミュレーションはスリップ率が0.2に安定しているが, 実験では保証した範囲内である  $10 \leq V \leq 50$  でも大きく振動してしまう. 今後の課題は大きく振動する原因を探り,  $10 \leq V \leq 50$  の範囲と行列ポリトープ表現で保証した摩擦係数の端点においてスリップ率を安定化させることが挙げられる.

## 7 参考文献

- [1] Idar Petersen, Tor A. Johansen, Jens Kalkkuhl and Jens Ludemann: Wheel Slip Control in ABS Brakes Using Gain Scheduled Constrained LQR, Proc. European Contr. Conf., Porto, pp606-611