楕円軌道上の相対運動方程式とその周期解

2010SE103 小林史弥　2010SE104 小林弘明

指導教員：市川朗

1　はじめに

フォーメーションフライトとは複数の宇宙機による編隊飛行のことである. その基礎研究として, 地球周回軌道上の衛星とその近くを飛行する従衛星の相対運動が注目されている. フォーメーションフライトでは従衛星は適切な相対位置関係を維持することが望ましい. 主衛星の軌道が円軌道の場合, その近傍の従衛星の相対運動方程式を原点周りで線形化した Hill-Clohessy-Wiltshire(HCW) 方程式が用いられる. 主衛星の軌道が楕円軌道の場合の線形化した相対運動方程式は Tschauner-Hempel(TH) 方程式と呼ばれる. 本研究では TH 方程式の周期解を用いてフォーメーションフライトの研究を行う.

2　楕円軌道上の相対運動方程式

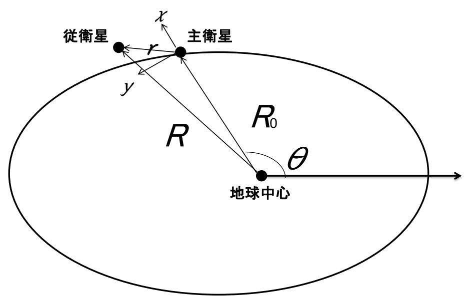

図 1　楕円軌道上の主衛星と従衛星

主衛星の軌道は

$$R_0=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad p=a(1-e^2) \tag{1}$$

で与えられる楕円軌道とする. ここで
R_0:動径, μ:地球の重力定数, θ:真近点離角, a:長半径,
e:離心率, p:半直弦, 平均運動を $n=\sqrt{\mu/a^3}$ とする.
楕円軌道の方程式は以下の 2 式で与えられる.

$$\begin{aligned}\ddot{R}_0-R_0\dot{\theta}^2&=-\frac{\mu}{R^2}\\ R_0\ddot{\theta}+2\dot{R}_0\dot{\theta}&=0\end{aligned} \tag{2}$$

主衛星とともに回転する座標系 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ を導入する.
$\boldsymbol{i}$ は動径方向, $\boldsymbol{j}$ は飛行方向, $\boldsymbol{k}$ は軌道面外への単位ベクトルである.$\boldsymbol{r}$ を主衛星に対する従衛星の位置ベクトルとし, $\boldsymbol{r}$=$x\boldsymbol{i}$+$y\boldsymbol{j}$+$z\boldsymbol{k}$ とする. 従衛星の地球中心からの位置ベクトルは $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R_0}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}$ である. ニュートンの運動方程式

$$\ddot{\boldsymbol{R}}+\frac{\mu}{R^3}\boldsymbol{R}=0$$

より次の方程式が得られる.

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{\theta}\dot{y}-\ddot{\theta}y-\dot{\theta}^2x-\frac{\mu}{R_0^2}&=-\frac{\mu}{R^3}(x+R_0)+u_x\\ \ddot{y}+2\dot{\theta}\dot{x}+\ddot{\theta}x+\dot{\theta}^2x&=-\frac{\mu}{R^3}+u_y\\ \ddot{z}&=-\frac{\mu}{R^3}z+u_z\end{aligned} \tag{3}$$

ここで,R=$\sqrt{(R_0+x)^2+y^2+z^2}$ である. 原点 x=y=z=0 で (3) を線形化すると,

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{\theta}\dot{y}-\ddot{\theta}y-(\dot{\theta}^2+2\frac{\mu}{{R_0}^3})x&=u_x\\ \ddot{y}+2\dot{\theta}\dot{x}+\ddot{\theta}x-(\dot{\theta}^2-\frac{\mu}{{R_0}^3})x&=u_y\\ \ddot{z}+\frac{\mu}{{R_0}^3}z&=u_z\end{aligned} \tag{4}$$

となる. (4) は Tshauner-Hempel 方程式とよばれる.

$$\boldsymbol{x}=[x\ y\ \dot{x}\ \dot{y}\ z\ \dot{z}]^T=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6]^T$$

$$\boldsymbol{u}=[u_x\ u_y\ u_z]^T$$

とおくと, 状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x_0}$$

ここで,

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\\dot{\theta}^2+2\mu/{R_0}^3&\ddot{\theta}&0&2\dot{\theta}&0&0\\-\ddot{\theta}&\dot{\theta}^2-\mu/{R_0}^3&-2\dot{\theta}&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-{R_0}^3/\mu&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

である. 時間 t を無次元化し τ=nt とする. また (x,y,z) をそれぞれ長半径 a により無次元化し

$$(\bar{x}(\tau),\bar{y}(\tau),\bar{z}(\tau))=(1/a)(x(\tau/n),y(\tau/n),z(\tau/n))$$

とおく. ここで, 式 (2), 式 (4) を無次元化すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}\bar{R}_0''-\bar{R}_0(\bar{\theta}')^2&=-\frac{1}{{\bar{R}_0}^2}\\ \bar{R}_0\bar{\theta}''+2\bar{R}'_0\bar{\theta}'&=0\end{aligned} \tag{5}$$

$$\bar{x}'' - 2\bar{\theta}\bar{y}' - \bar{\theta}''\bar{y} - \left[(\bar{\theta}')^2 + \frac{2}{\bar{R_0}^2}\right]\bar{x} = \bar{u}_x$$
$$\bar{y}'' + 2\bar{\theta}'\bar{x}' + (\bar{\theta}')^2\bar{x} - \left[(\bar{\theta}')^2 + \frac{1}{\bar{R_0}^2}\right]\bar{y} = \bar{u}_y \qquad (6)$$
$$\bar{z}'' = -\frac{1}{\bar{R_0}}\bar{z} + \bar{u}_z$$

ここで $'$ は τ に関する微分を表す. さらに,

$[\bar{u}_x(\tau)\ \bar{u}_y(\tau)\ \bar{u}_z(\tau)] = (1/an^2)[u_x(\tau/n), u_y(\tau/n), u_z(\tau/n)]$

$\bar{\theta}(\tau) = \theta(\tau/n)$ とおく (4) を無次元化した状態方程式は

$$\bar{x}' = \boldsymbol{A}(\tau)\bar{x} + \boldsymbol{B}\bar{u}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{A}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\bar{\theta}')^2 + 2/{R_0}^3 & \bar{\theta}'' & 0 & 2\bar{\theta}' & 0 & 0 \\ -\bar{\theta}'' & \bar{\theta}'^2 - 1/{R_0}^3 & -2\bar{\theta}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/{R_0}^3 & 0 \end{bmatrix} (8)$$

となる.

$\bar{\theta}''$ は (11) 式の第 2 式を用いて,

$$\bar{\theta}'' = -\frac{2\bar{R}_0'\bar{\theta}}{\bar{R}_0}$$

と表せる.

TH 方程式は t を θ で置き換え, $(\widetilde{x}(\theta),\widetilde{y}(\theta),\widetilde{z}(\theta))=(1+e\cos\theta)(x,y,z)$ とおくことにより Yamanaka と Ankerson [1] により解かれた. 軌道面外運動は正弦関数で与えられ周期解となる. 軌道面内の運動が周期解になるための必要十分条件は

$$(3\rho + e^2 - 1)\widetilde{x}(\theta_0) + es\widetilde{x}'(\theta_0) + \rho^2\widetilde{y}'(\theta_0) = 0$$

で与えられる. ここで $\rho = 1 + e\cos\theta$ である. この条件は $\theta_0=0,\pi$ のとき簡単になる. 実際に代入すると,

$$(2{+}e)\widetilde{x}(0){+}(1{+}e)\widetilde{y}'(0) = 0,\ (2{-}e)\widetilde{x}(\pi){+}(1{-}e)\widetilde{y}'(\pi) = 0$$

となる. これより, 式 (5) の周期解の初期条件は以下のようになる.

$$\bar{y}'(0) = -\frac{2+e}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}\bar{x}(0) \text{ 近地点}$$
$$\bar{y}'(0) = -\frac{2-e}{(1+e)\sqrt{1-e^2}}\bar{x}(0) \text{ 遠地点} \qquad (9)$$

3　フォーメーション

無次元化した方程式 (5) の状態方程式は

$$\bar{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{u}},\ \boldsymbol{x}(0) = \bar{\boldsymbol{x_0}} \qquad (10)$$

と表せる. ここで $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}})$ は次のようになる.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

$$\boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} \left[(\theta')^2 + \frac{2}{R_0^3} - 3\right]\bar{x}_1 + \bar{\theta}''\bar{x}_2 + \left[2\bar{\theta}' - 2\right]\bar{x}_4 \\ \bar{\theta}''\bar{x}_1 + \left[(\bar{\theta}')^2 + \frac{1}{R_0^3}\right]\bar{x}_2 + \left[2 - 2(\bar{\theta}')\right]\bar{x}_3 \\ \left(1 - \frac{1}{R_0^3}\right)\bar{x}_5 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

主衛星の初期位置が近地点のとき従衛星の初期軌道および目標軌道の初期値をそれぞれ以下のようにおく.

$$\widetilde{\boldsymbol{x_0}} = \left[0.01\ 0\ 0\ \frac{-0.01(2+e)}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}\ 0.01\ 0\right]$$
$$\widetilde{\boldsymbol{x_{f0}}} = \left[0.005\ 0\ 0\ \frac{-0.005(2+e)}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}\ 0.005\ 0\right] \qquad (14)$$

主衛星の初期位置が遠地点のとき

$$\widetilde{\boldsymbol{x_0}} = \left[0.01\ 0\ 0\ \frac{-0.01(2-e)}{(1+e)\sqrt{1-e^2}}\ 0.01\ 0\right]$$
$$\widetilde{\boldsymbol{x_{f0}}} = \left[0.005\ 0\ 0\ \frac{-0.005(2-e)}{(1+e)\sqrt{1-e^2}}\ 0.005\ 0\right] \qquad (15)$$

目標軌道の方程式は以下のように表せる.

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{f}}' = \boldsymbol{A}(\tau)\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{f}}) \qquad (16)$$

フォーメーションフライトは従衛星を目標軌道に乗せることを目的にする. 誤差 e=$\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{f}}$ は以下を満たす.

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{f}})) \qquad (17)$$

ここで, フィードバック

$$\bar{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{f}}) \qquad (18)$$

を用いれば

$$\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{e} \qquad (19)$$

このとき,$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ が安定であれば誤差は 0 に収束する. フィードバックゲイン $\boldsymbol{K}$ は最適レギュレータのリッカチ方程式

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{X} = 0 \qquad (20)$$

を用いて設計する.

4　シミュレーション結果

フィードバックゲイン $\boldsymbol{K}$ は最適レギュレータの重み行列を $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{R} = 10^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{I}$ とおき, $\boldsymbol{r}$ を変化させて設計する. はじめに主衛星の初期位置を近地点とする. 図 2 は面内運動の入力の L_1 ノルム　図 3 は面外運動の入力の L_1 ノルムである.　ここで離心率 e をパラメータとして表示している. e=0 は主衛星の軌道が円軌道の場合に対応し, L_1 ノルムは r と共に単調に減少する. フィードバックゲインは HCW 方程式のリッカチ方程式を用いているため e>0 の

場合, L_1 ノルムは始めは r と共に減少するが, やがて r と共に増加する. したがって各離心率 e に対して, 最小の L_1 ノルムを与える r が必ず存在する. 図 4 は目標軌道に収束するまでの時間のグラフである. 整定時間は r とともに単調に増加し, 離心率に依存しない. これらのグラフを元に L_1 ノルム, 整定時間の仕様を満たすフィードバックが設計できる.

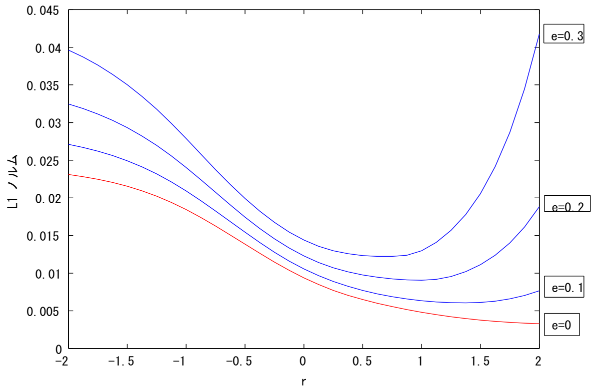

図 2　近地点:面内運動の L_1 ノルム

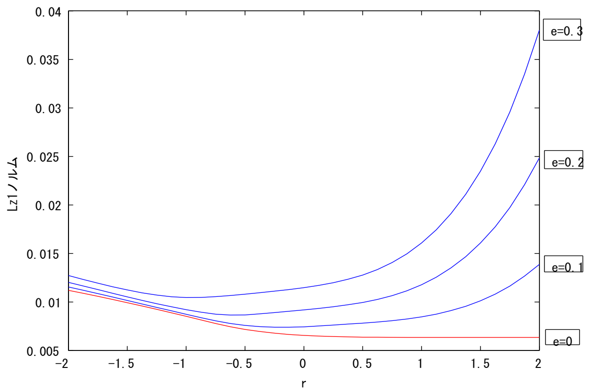

図 3　近地点:面外運動の L_1 ノルム

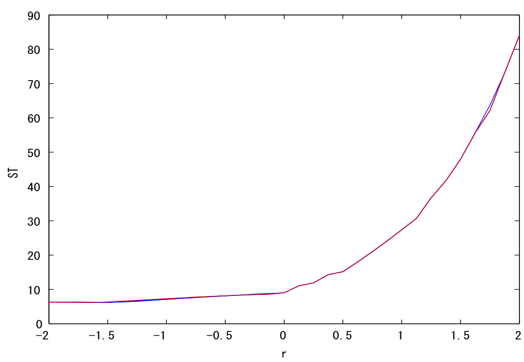

図 4　整定時間 ST

次に主衛星の初期位置を遠地点とした場合の L_1 ノルムを図 5, 図 6 に与える. r の依存性は, 主衛星の初期値が近地点の場合と同様である. また整定時間もほぼ同じである. L_1 ノルムの大きさは, 遠地点からの制御を行ったほうが小さくなる.

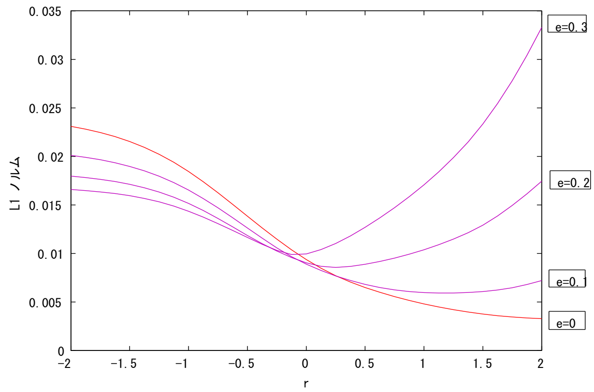

図 5　遠地点:面内運動の L_1 ノルム

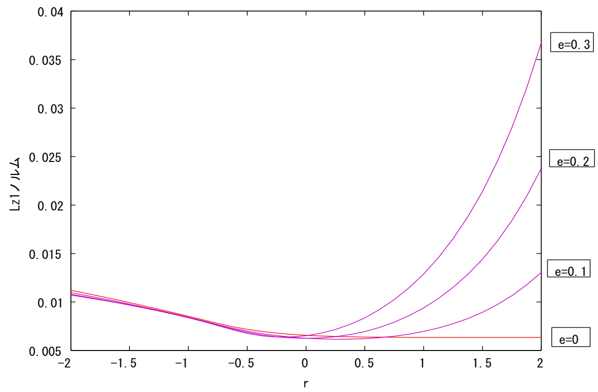

図 6　遠地点:面外運動の L_1 ノルム

また, 実際の軌道シミュレーションを求める.

離心率 e=0.3 の場合に図 (6) から最小の L_1 ノルムを与える r=0.125 を入力した制御軌道を図 (7) に示した.

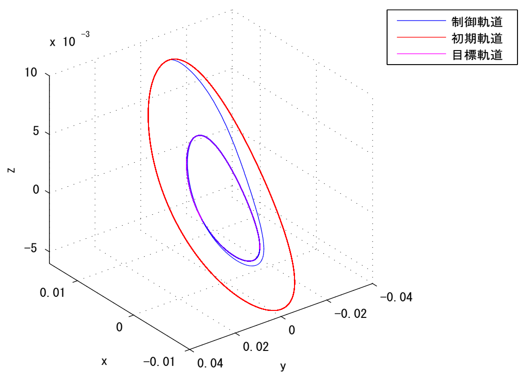

図 7　制御軌道:離心率 e=0.3

5　簡易フィードバックによる制御

ここではフィードバック (18) を線形フィードバック $\bar{\mathbf{u}}=-\mathbf{Ke}$ に置き換えた時のシミュレーション結果を紹介する．簡易フィードバックは離心率が大きくなると収束判定である目標軌道と制御軌道との差が 10^{-5} 以下の条件を満たさなくなるので, 制御可能な r の値を用いる．図 8, 図 9 は, 主衛星の初期位置が近地点の場合の L_1 ノルムと L_1 ノルムであり,

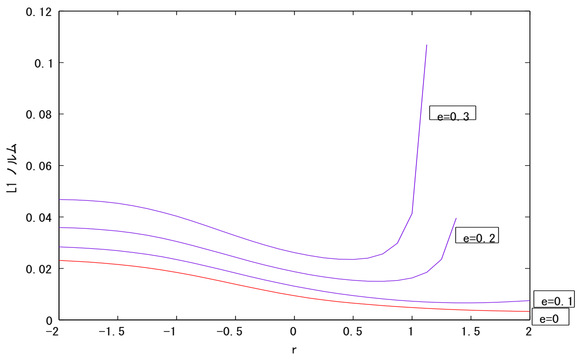

図 8　近地点:面内運動の L_1 ノルム

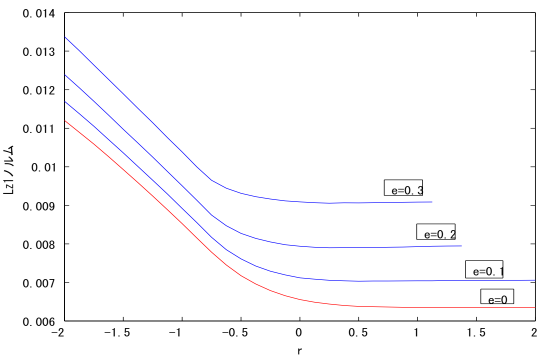

図 9　近地点:面内運動の L_1 ノルム

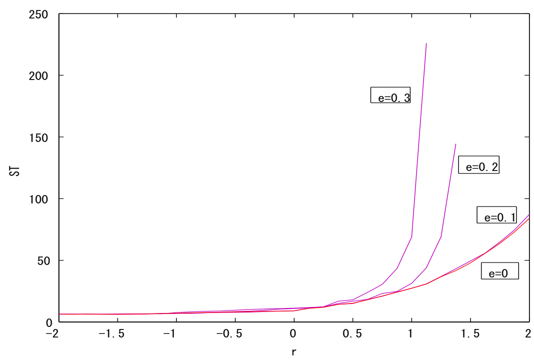

図 10　整定時間 ST

図 10 は整定時間のグラフである.r が 0.5 を超えると目標軌道への収束が遅くなり, やがて収束しなくなる．このため面内運動の L_1 ノルムも急速に増加する．

図 11, 図 12 は主衛星の初期位置が遠地点の時の L_1 ノルムである. 整定時間は近地点の場合とほぼ同じである.L_1 ノルムは遠地点から制御を行ったほうが小さくなる．フィードバック (18) と比較すると L_1 ノルムはやや大きくなるが, 線形フィードバックでも良好な制御を行うことができる.

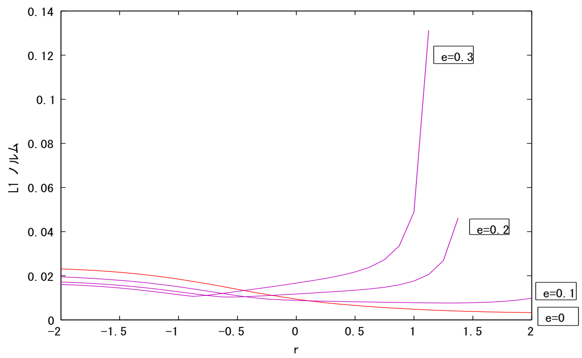

図 11　遠地点:面内運動の L_1 ノルム

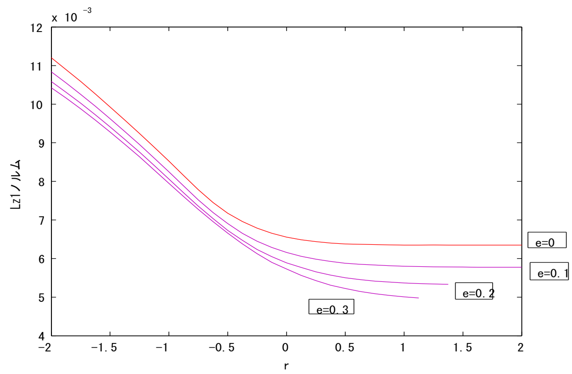

図 12　遠地点:面外運動の L_1 ノルム

6　終わりに

主衛星の初期位置を遠地点とした場合 L_1 ノルムの大きさが小さくなる．簡易フィードバックは離心率 e=0.1 程度ならばフルフィードバックとあまり差はなかったが, それ以上の離心率 e では性能が落ちるため, 適切な入力をしなくてはならない.

7　参考文献

1. K.Yamanaka and Ankerson,New state transition matrix for relative motion an orbitary elliptical orbit,J.Guidance,Control,Dynamics, vol.25,2002,pp.60-66.
2. Bando,M. and Ichikawa, Akira,"Graphical Generation of Periodic Orbits of the Tshauner-Hempel Equations Journal of Guidance,Control,and Dynamics,Vol.35,No.3,2012,pp-1002-1007