Control Moment Gyroscope の非線形追従制御

2010SE131 村井千夏

指導教員：高見勲

1　はじめに

Control Moment Gyroscope(以下，CMG) は少ない入力で多くの状態を制御できる劣駆動システムであり，非ホロノミックと呼ばれる拘束を持つ．このようなシステムの多くは平衡点における線形近似系が可制御でないため，線形制御をそのまま適用することができない．本研究で扱う CMG は 2 入力対称 Affine な非ホロノミックシステムである．このシステムに対しては Chained system と呼ばれる正準形が知られており，多くの制御手法が提案されている．その中でも時間軸状態制御形 (Time-State Control Form 以下，TSCF) を用いた制御手法は，システムを二つのサブシステムに分割して，一方のサブシステムにフィードフォワード制御を施すことにより，他方のシステムの安定性を線形制御理論で保証することができる [1]．本研究では，TSCF を用いてサーボシステムを構築し，制御対象を偏差なく目標値に追従させることを目的とする．

2　数学モデル

図 1 は CMG の概略図である．CMG には Rotor1 を回転させる Motor1 のトルク $T_1(t)$ と Gimbal2 を傾ける Motor2 のトルク $T_2(t)$ が存在する．Rotor1 の角度と角速度を $q_1(t)$，$\omega_1(t)$，Gimbal2 の角度と角速度を $q_2(t)$，$\omega_2(t)$，Gimbal3 の角度と角速度を $q_3(t)$，$\omega_3(t)$ と定義する．Rotor1, Gimbal2, Gimbal3 の運動方程式はそれぞれ式 (1), (2), (3) となる [2]．

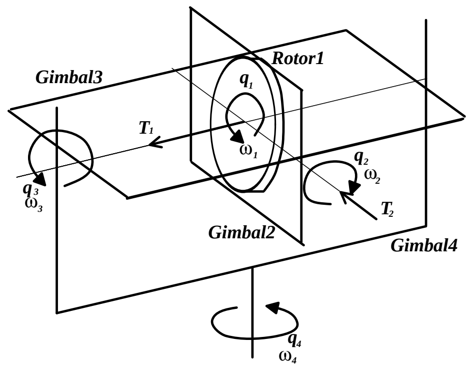

図 1　Schematic model of CMG

$$J_D\dot{\omega}_1 + J_D\dot{\omega}_3\cos q_2 - J_D\omega_2\omega_3\sin q_2 = T_1 \tag{1}$$

$$(I_C+I_D)\dot{\omega}_2 + J_1\omega_3^2\sin q_2\cos q_2 + J_D\omega_1\omega_3\sin q_2 = T_2 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(J_2 - J_1\sin^2 q_2)\dot{\omega}_3 + J_D\dot{\omega}_1\cos q_2 - J_D\omega_1\omega_2\sin q_2 \\ -J_1\omega_2\omega_3\sin 2q_2 = 0\end{aligned} \tag{3}$$

I_D，J_D: Rotor1 の慣性モーメント [kg・m^2]
I_C，J_C，K_C: Gimbal2 の慣性モーメント [kg・m^2]
J_B: Gimbal3 の慣性モーメント [kg・m^2]
$J_1 = J_C + J_D - K_C - I_D$, $J_2 = J_B + J_C + J_D$

初期状態において Gimbal3 が静止している場合，式 (3) より次の拘束条件式が得られる．

$$(J_2 - J_1\sin^2 q_2)\omega_3 + J_D\omega_1\cos q_2 = 0 \tag{4}$$

式 (4) のような拘束条件式の項に状態のみでなく状態の一階微分を持つシステムを一階非ホロノミックシステムと呼ぶ．ここで式 (4) に対して状態変数を $q = [q_1\ q_2\ q_3]^T$，入力を ω_1，ω_2 と定義すると，CMG の状態方程式は次のように表現することができる．

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha(q_2) \end{bmatrix}\omega_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\omega_2 \tag{5}$$

式 (5) のような 2 入力対称 Affine システムは座標変換により Chained system に変換可能である．ここで，本研究では CMG の動特性を考慮し，一般的な Chained system への変換手順を用いるのではなく次に示す座標変換と入力変換を提案する．

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha(q_2) \\ x_2 = q_1 \\ x_3 = q_1\alpha(q_2) - q_3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \beta(q_2)\omega_2 \\ u_2 = \omega_1 \end{array}\right. \tag{6}$$

$$\alpha(q_2) = \frac{-J_D\cos q_2}{J_2 - J_1\sin^2 q_2},\ \beta(q_2) = \frac{d}{dq_2}\alpha(q_2)$$

Chained system は次のように表現される．

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2u_1 \end{array}\right. \tag{7}$$

式 (7) より，TSCF は式 (8), (9) で表現される．

$$\frac{d}{dx_1}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{u_2}{u_1} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}x_1 = u_1 \tag{9}$$

ここで，式 (8) は x_1 を時間軸とみなすことで可制御正準形で表現されるため，従来の線形制御理論で安定化可能な状態方程式である．また，x_1 は式 (9) を用いて制御し，単調増加また単調減少のどちらかでなければならないため $u_1 \neq 0$ かつ，定数とする．

3　制御系設計

駆動源のない Gimbal3 の角度 q_3 を偏差なく目標値に追従させるために，最適サーボシステムを用いた制御系設計を行う．式 (8)，(9) に x_3 の偏差の積分を加えた次の拡大偏差システム (10) を考える．

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dx_1}\tilde{x}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tilde{x}_e + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\tilde{\mu} \\ e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tilde{x}_e \end{array}\right. \tag{10}$$

$$\tilde{x}_e = \begin{bmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_{3\infty} \\ x_2 - x_{2\infty} \\ s - s_\infty \end{bmatrix},\ \tilde{\mu} = \frac{u_2}{u_1} - \frac{u_{2\infty}}{u_{1\infty}}$$

$$e = x_3^{ref} - x_3,\ s = s_0 + \int_0^t e\ \mathrm{dt}$$

制御器は次式で与えられる．

$$u_1 = C \quad (\mathrm{const}) \tag{11}$$

$$u_2 = K\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + G\int_0^t e\ \mathrm{d}t + F_a x_3^{ref} + F_b x(0) \tag{12}$$

u_1，u_2 を用いて制御入力 T_1，T_2 を導出する．u_1，u_2 を安定化するために偏差を次のようにとる．

$$\bar{u}_1 = \beta(q_2)\omega_2 - C$$
$$\bar{u}_2 = \omega_1 - \{K\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + G\int_0^t e\ \mathrm{d}t + F_a x_3^{ref} + F_b x(0)\} \tag{13}$$

$\bar{u}_1$，$\bar{u}_2$ ダイナミクスは次のようになる．

$$\dot{\bar{u}}_1 = \frac{d}{dq_2}\beta(q_2)\omega_2^2 + \beta(q_2)\dot{\omega}_2$$
$$\dot{\bar{u}}_2 = \dot{\omega}_1 - (K\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + Ge + F_a\dot{x}_3^{ref}) \tag{14}$$

式 (14) を重み H_1, H_2 を以下のように用いて安定化することを考える．ただし, Lyapunov 関数は, $V(\bar{u}_1) = \bar{u}_1^2/2$, $V(\bar{u}_2) = \bar{u}_2^2/2$ とし，$H_1 > 0$, $H_2 > 0$ である．

$$\dot{\bar{u}}_1 = -H_1\bar{u}_1$$
$$\dot{\bar{u}}_2 = -H_2\bar{u}_2 \tag{15}$$

式 (14) より，Rotor1，Gimbal2 の角加速度 $\dot{\omega}_1$，$\dot{\omega}_2$ は次のようになる．

$$\dot{\omega}_1 = K\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + Ge + F_a\dot{x}_3^{ref}$$
$$-H_2(\omega_1 - K\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} - G\int_0^t e\ \mathrm{d}t - F_a x_3^{ref} + F_b x(0)) \tag{16}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{\beta(q_2)}\{-H_1(\beta(q_2)\omega_2 - C) - \frac{d}{dq_2}\beta(q_2)\omega_2^2\} \tag{17}$$

角加速度 $\dot{\omega}_3$ は式 (3) より以下のようになる．

$$\dot{\omega}_3 = \frac{-J_D\dot{\omega}_1\cos q_2 + J_D\omega_1\omega_2\sin q_2 + J_1\omega_2\omega_3\sin 2q_2}{J_2 - J_1\sin^2 q_2} \tag{18}$$

以上，式 (16)，(17)，(18) を式 (1)，(2) に代入することにより, 制御入力 T_1， T_2 を導出することができる．

4　シミュレーション

設計した制御系を用いてシミュレーションを行う．指令軌道をつぎのように用意する．また，$-\frac{\pi}{2} < q_2 < \frac{\pi}{2}$ である．

$$q_3^{ref} = \begin{cases} 0.5\sin\frac{\pi}{8}t & (t < 4) \quad [\mathrm{rad}] \\ 0.5 & (t \geq 4) \quad [\mathrm{rad}] \end{cases} \tag{19}$$

シミュレーションの初期値は $q_0 = [2.3389\ \frac{\pi}{8}\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ とし, ゲインチューニングと C はつぎのように設定した．

$$H_1 = 50,\ H_2 = 0.2,\ C = \pm 0.08 \tag{20}$$

状態フィードバックゲインはつぎのよう得られた．
・forward mode

$$K = [\ -57 \quad -3\ ],\ G = 10,\ F_a = 43,\ F_b = [\ 13 \quad 0.3\ ]$$

・backward mode

$$K = [\ 57 \quad -3\ ],\ G = -10,\ F_a = -43,\ F_b = [\ -13 \quad 0.3\ ]$$

シミュレーション結果を図 2，3，4，5 に示す．点線が指令軌道，実線が応答である．グラフより，時間はかかるが Gimbal3 の角度は目標値に収束しており，Gimbal2 では切替えが行われていることがわかる．また，Motor1, Motor2 のトルクは図 5，6 のようになった．トルクの出力範囲はそれぞれ $-0.6 < T_1 < 0.6$, $-2.4 < T_2 < 2.4$ であり，範囲内にトルクを抑えられていることがわかる．

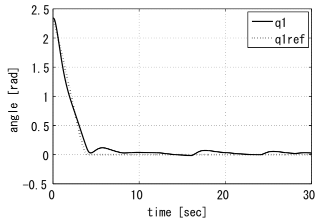

図 2　Simulation of Rotor1

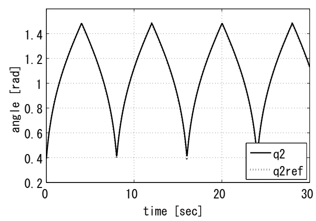

図 3　Simulation of Gimbal2

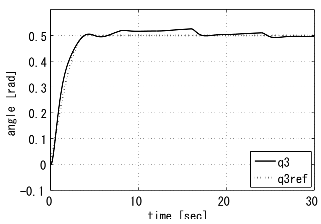

図 4　Simulation of Gimbal3

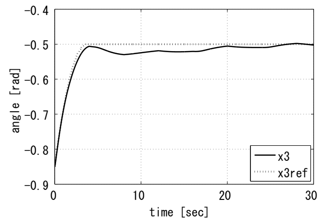

図 5　Simulation of x_3

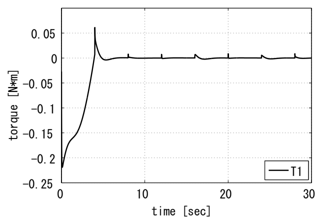

図 6　Simulation of Motor1

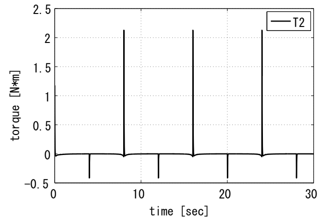

図 7　Simulation of Motor2

5　おわりに

本研究の成果は次の 2 点である．

1. 提案した Chained system を TSCF で表現した．
2. 駆動源のない Gimbal3 の角度追従制御を行い，理論の信頼性をシミュレーションにより検証した．

参考文献

[1] M. Sampei: A control strategy for a class for non-holonomic systems - time-state control form and its application -, *In Proc of 33rd CDC*, pp. 1120-1121, 1994

[2] Mahmut Reyhanoglu and Jasper van de Loo: State Feedback Tracking of a Nonholonomic Control Moment Gyroscope, *In Proc of 45th CDC*, pp. 6156-6161, 2006