ロープ長の速度，加速度を考慮したジブクレーンのロバスト制御

2010SE150 成田将規　2010SE258 後呂拓司

指導教員：高見勲

1　はじめに

本研究では動特性に含まれる変動パラメータを省略することなくモデル化，制御系の設計を行う． 今回はロープ長の変動に注目する．ロープ長は時変なパラメータであるため，その変化速度，加速度が存在する．しかし，ロープ長に関する従来の研究では，ロープ長を時変パラメータとしモデリングを行っているが，制御系設計の際にロープ長の変化速度，加速度を 0 として扱っており [1] [?] モデル化誤差が生じてしまう．そこで，本研究ではロープ長の変化速度，加速度を省略することなく最適レギュレータ理論に基づくロバスト LQ 制御器 (R-LQ 制御器)，単一リアプノフ関数に基づくゲインスケジューリング制御器 (S-GS 制御器)，パラメータ依存リアプノフ関数に基づくゲインスケジューリング制御器 (PDL-GS 制御器) の設計を行う．それらを，ロープ長の変化速度，加速度を 0 とした数学モデルで制御器の設計したもと評価関数値，シミュレーション結果の比較を行う．その比較より，ロープ長の速度，加速度を数学モデル，制御器に考慮する有効性を検証する．また，各制御器の制御性能の比較も行う．

2　制御対象

滑車の位置 ξ [m]，吊り荷の振れ角 γ [rad]，ロープ長 l [m] であり，制御量は吊り荷の水平方向の位置 y [m] ($y = \xi - l\sin\gamma$) とする．操作量は横行き用モータへの入力電流 I_j [A] である．クレーンの概略図を図 1 に示す.

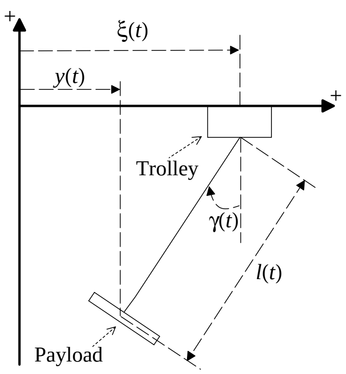

図 1 クレーンの概略図

また，この際 γ は十分小さく，$\sin\gamma \simeq \gamma$，$\cos\gamma \simeq 1$，$\dot{\gamma}^2 \simeq 0$ のように近似できるものとする．

3　ディスクリプタ方程式

一般化座標 $q(t)$ を $q(t) = [\xi(t) \ \ \gamma(t)]^T$ とおくと，従来の数学モデルは 式 (1) のように与えられる．

$$\hat{E}(l)\ddot{q}(t) + \hat{G}q(t) = \hat{H}I_j(t) \tag{1}$$

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} m_j & -m_p l \\ -m_p & m_p l \end{bmatrix}, \ \hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_p g \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} k_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

本研究は，$\dot{l}, \ddot{l}$ を省略することなく数学モデルの導出を行う．これにより，2 つの動作を同時に行う場合のいかなるロープ長の変動に対しても安定な制御器を構築できることを理論的に保証する．求められる数学モデルを 式 (2) に示す.

$$E(l)\ddot{q}(t) + F(\dot{l})\dot{q}(t) + G(\ddot{l})q(t) = HI_j(t) \tag{2}$$

$$E = \begin{bmatrix} m_j & -m_p l \\ -m_p & m_p l \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} 0 & -2m_p\dot{l} \\ 0 & 2m_p\dot{l} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -m_p\ddot{l} \\ 0 & m_p g \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} k_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

本研究の制御目的は吊り荷を偏差なく目標値に追従させることである．そのため，拡大系を設計する．偏差を $e = r - y$ とし，偏差の積分を $x_e = \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$ とすると，状態変数は $x(t) = [(q(t) - q(\infty))^T \ \ \dot{q}(t)^T \ \ x_e(t) - x_e(\infty)]^T$ ，操作量は $u(t) = u_p(t) - u_p(\infty)$ となる．ここにおける $q(\infty)$，$x_e(\infty)$，$u_p(\infty)$ は定常値である． 式 (2) の拡大系を状態方程式にした際，行列 $E^{-1}F$，$E^{-1}G$ が非線形な形になるため，ディスクリプタ表現を用いる．ディスクリプタ変数を $x_d(t) = [x(t)^T \ \ \ddot{q}(t)^T]^T$ とすると， 式 (2) は 式 (3) のように与えられる．

$$E_d\dot{x}_d = A_d(l, \ \dot{l}, \ \ddot{l})x_d + Bu \tag{3}$$

$$E_d = \mathrm{diag}(I, \ I, \ 1, \ 0), \ J = \begin{bmatrix} 1 & -l \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -J & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & 0 & -E \end{bmatrix} \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix}$$

4　制御器設計

本研究ではロバストな制御器を設計する．そのため，変動パラメータである l, $\dot{l}$, $\ddot{l}$, $\dddot{l}$ のポリトープ端点の上下界を頂点とするパラメータボックスを 式 (4) で与える．

$$\Phi = \{\phi = [\phi_1, \ \phi_2, \ \phi_3, \ \phi_4]^T \colon \phi_i \in \{\underline{\phi_i}, \ \overline{\phi_i}\}\} \tag{4}$$

$$\phi_1 = l, \ \phi_2 = \dot{l}, \ \phi_3 = \ddot{l}, \ \phi_4 = \dddot{l}, \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

4.1　ロバスト LQ 制御器設計

得られたディスクリプタシステム 式 (3) に対し，LQ 制御を考慮した場合の一般化制御対象を 式 (5) と与える．

$$\begin{cases} E_d\dot{x}_d & = A_d(\phi_1, \ \phi_2, \ \phi_3)x_d + B_{dw}w + B_{du}u \\ \quad z & = C_d x_d + D_d u \end{cases} \tag{5}$$

$$B_{dw} = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ C_d = \begin{bmatrix} W_x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix},\ W_x = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

w はインパルス外乱入力，z は評価出力，Q は状態変数 x に対する重み行列，R は制御入力 u に対する重みである．ここで, 式 (5) のシステムの w から z までの評価関数が 式 (6) で与える．

$$\|G_{zw}\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt \tag{6}$$

式 (5) で表されるシステムを変動パラメータ ϕ_i の変動範囲内において安定化し，評価関数を最小化する LMI 条件は 式 (7) で与えられる．

minimize : γ

subject to : $E_d X_d = (E_d X_d)^T \geq 0$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\{A_d(\Phi)X_d + B_d Y_d\} & (C_d X_d + D_d Y_d)^T \\ C_d X_d + D_d Y_d & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} W & B_{dw} \\ B_{dw}^T & X \end{bmatrix} > 0$$

$\mathrm{Trace}(W) < \gamma^2$

ただし，式 (7) で与えられる条件 $E_d X_d = (E_d X_d)^T$ よりリアプノフ行列に対し式 (8) の制約が必要となる．よって，行列 X_d は 式 (9) より以下のように定める．

$$E_d X_d = (E_d X_d)^T$$

$$= \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X_{12} = 0 \tag{8}$$

$$X_d = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \tag{9}$$

以上より，ロバスト LQ コントローラは 式 (10) で与えられる．

$$K_d = Y_d X_d{}^{-1} \tag{10}$$

4.2 PDL-GS 制御器設計

ロバスト LQ 制御器と同様に得られたディスクリプタシステム 式 (3) に対し，LQ 制御を考慮した場合の一般化制御対象を 式 (5) と与える．リアプノフ行列 $X_d(\phi)$ を 式 (11) と定義する．

$$X_d(\Phi) = \begin{bmatrix} X_{11}(\Phi) & 0 \\ X_{21}(\Phi) & X_{22}(\Phi) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$= X_{d0} + \sum_{n=1}^{3} \phi_n X_{dn}$$

変数行列 $Y_d(\phi)$ は 式 (12) と定義する．

$$Y_d(\Phi) = \begin{bmatrix} Y_{11}(\Phi) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$= Y_{d0} + \sum_{n=1}^{3} \phi_n Y_{dn}$$

リアプノフ行列 $X_d(\phi)$，変数行列 $Y_d(\phi)$ を考慮し得られる LMI 条件式は 式 (12) となる．

minimize : γ

subject to : $E_d X_d(\Phi) = E_d X_d(\Phi)^T \geq 0$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\{A_d(\Phi)X_d(\Phi) + B_d Y_d(\Phi)\} - E_d \dot{X}_d(\Phi) & (C_d X_d(\Phi) + D_d Y_d(\Phi))^T \\ C_d X_d(\Phi) + D_d Y_d(\Phi) & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} W & B_{dw} \\ B_{dw}^T & X_d(\Phi) \end{bmatrix} > 0$$

$\mathrm{Trace}(W) < \gamma^2$

LMI 条件式 (13) より $\mathrm{He}\{A_d(\Phi)X_d(\Phi) + B_d Y_d(\Phi)\}$ を満たさなければならない．しかし，$A_d(\Phi)X_d(\Phi)$ には変動パラメータの二乗項が存在する．そのため，式 (13) が Φ に対しマルチアフィンとなるような制約が必要となる．よって，行列 $A_d(\Phi)$ の構造を考慮しリアプノフ行列 $X_d(\Phi)$ に対し式 (14), (15), (16) の制約を与える [2].

$$X_{d1} = \begin{bmatrix} X1_{11} & 0 & X1_{13} & X1_{14} & X1_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X1_{13}^T & 0 & X1_{33} & X1_{34} & X1_{35} & 0 & 0 \\ X1_{14}^T & 0 & X1_{43}^T & X1_{44} & X1_{45} & 0 & 0 \\ X1_{15}^T & 0 & X1_{35}^T & X1_{45}^T & X1_{55} & 0 & 0 \\ X1_{61} & X1_{62} & X1_{63} & X1_{64} & X1_{65} & X1_{66} & X1_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$X_{d2} = \begin{bmatrix} X2_{11} & X2_{12} & X2_{13} & 0 & X2_{15} & 0 & 0 \\ X2_{12}^T & X2_{22} & X2_{23} & 0 & X2_{25} & 0 & 0 \\ X2_{13}^T & X2_{23}^T & X2_{33} & 0 & X2_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X2_{15}^T & X2_{25}^T & X2_{35}^T & 0 & X2_{55} & 0 & 0 \\ X2_{61} & X2_{62} & X2_{63} & X2_{64} & X2_{65} & X2_{66} & X2_{67} \\ X2_{71} & X2_{72} & X2_{73} & X2_{74} & X2_{75} & X2_{76} & X2_{77} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$X_{d3} = \begin{bmatrix} X3_{11} & 0 & X3_{13} & X3_{14} & X3_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X3_{13}^T & 0 & X3_{33} & X3_{34} & X3_{35} & 0 & 0 \\ X3_{14}^T & 0 & X3_{34}^T & X3_{44} & X3_{45} & 0 & 0 \\ X3_{15}^T & 0 & X3_{35}^T & X3_{45}^T & X3_{55} & 0 & 0 \\ X3_{61} & X3_{62} & X3_{63} & X3_{64} & X3_{65} & X3_{66} & X3_{67} \\ X3_{71} & X3_{72} & X3_{73} & X3_{74} & X3_{75} & X3_{76} & X3_{77} \end{bmatrix} \tag{16}$$

式 (11)，(12) を考慮した LMI 条件を解くことで得られる $X_d(\Phi), Y_d(\Phi)$ より，リアプノフ関数に基づくゲインスケジューリングコントローラゲイン $K_d(\Phi)$ は 式 (17) で与えられる．

$$K_d(\Phi) = Y_d(\Phi) X_d(\Phi)^{-1} \tag{17}$$

ここで，リアプノフ行列 $X_d(\Phi)$ を変動パラメータに依存させず X_d とし，式 (13) において $E_d \dot{X}_d(\Phi) = 0$ とすることで単一のリアプノフ関数に基づくゲインスケジューリングコントローラゲイン $K_{d1}(\Phi)$ は式 (18) で与えられる．

$$K_{d1}(\Phi) = Y_d(\Phi) X_d^{-1} \tag{18}$$

5 シミュレーション

パラメータボックスの上下界を $l = \phi_1 \in [0.0985,\ 0.7]$, $\dot{l} = \phi_2 \in [-0.011,\ 0.2609]$, $\ddot{l} = \phi_3 \in [-2.0218,\ 2.0218]$, $\dddot{l} = \phi_4 \in [-60.2349,\ 60.2349]$ とし，ロープ長の巻き上げ速度の目標値を 0.25[m/s] とする．ロープ長とその速度，加速度は以下の図となる．

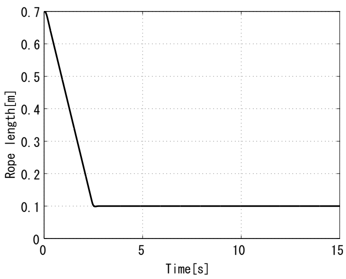

図 2　巻き上げ時のロープ長

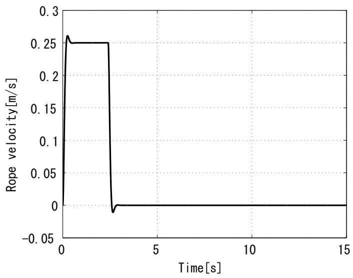

図 3　巻き上げ時のロープ速度

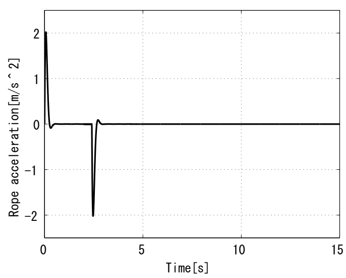

図 4　巻き上げ時のロープ加速度

5.1　R-LQ 制御器

ロープ長を固定した LQ 制御器，ロープ長の変動を考慮した R-LQ 制御器，ロープ長の速度，加速度を考慮した R-LQ 制御器の比較を行う．

表 1　ロバスト LQ 制御器の評価関数値比較

行列 A_d	評価関数 / 制御器の種類	上界値 (γ)	Simulation $(\|G_{zw}\|_2)$
$A_d(l)$	LQ($l = 0.35$ で固定)…①	1.1829	1.1725
	Robust LQ(ϕ_1)…②	1.3267	1.2698
$A_d(l,\dot{l},\ddot{l})$	Robust LQ($\phi_1\phi_2\phi_3$)…⑤	1.3384	1.2858

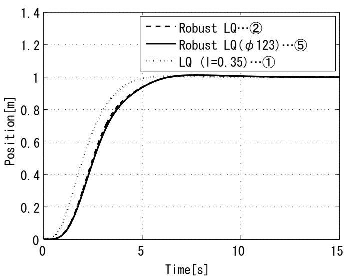

図 5　静止状態スタートの出力

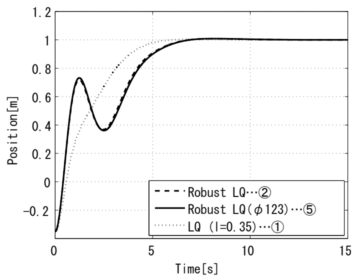

図 6　π/6 振れた状態スタートの出力

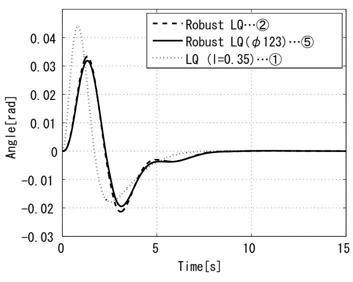

図 7　静止状態スタートの振れ角

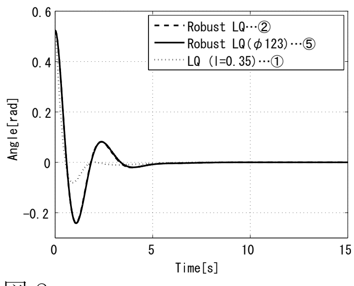

図 8　π/6 振れた状態スタートの振れ角

シミュレーション結果，評価関数値より R-LQ 制御器を設計する際にロープ長の変化速度，加速度を考慮したとしても制御性能は向上しないものと考えられる．さらに，R-LQ 制御器 (②, ⑤) は吊り荷の揺れに影響を受けて出力が振動していることがわかる．

5.2　S-GS 制御器

ディスクリプタ表現の枠組みにおいて $\dot{l},\ddot{l}$ を 0 とした場合と，ディスクリプタ表現の枠組みにおいて $\dot{l},\ddot{l}$ を考慮した場合で S-GS 制御器を設計し比較を行う．以下の表の括弧内はスケジューリングパラメータである．

表 2　S-GS 制御器の評価関数比較

行列 A_d	評価関数 / 制御器の種類	上界値 (γ)	Simulation $(\|G_{zw}\|_2)$
$A_d(l)$	Single Lyapunov GS(ϕ_1)…③	1.3271	1.1821
$A_d(l,\dot{l},\ddot{l})$	Single Lyapunov GS(ϕ_1)…⑥	1.3369	1.1806
	Single Lyapunov GS($\phi_1\phi_2$)…⑦	1.3369	1.1804
	Single Lyapunov GS($\phi_1\phi_2\phi_3$)…⑧	1.3369	1.1831

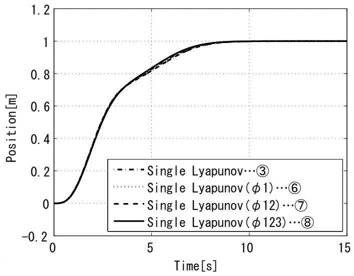

図 9　静止状態スタートの出力

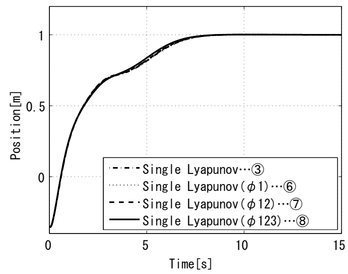

図 10　π/6 振れた状態スタートの出力

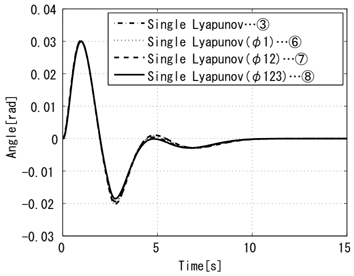

図 11　静止状態スタートの振れ角

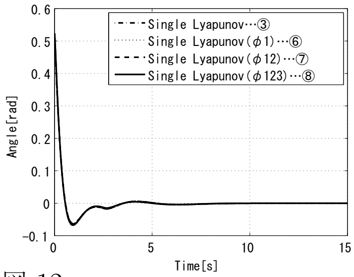

図 12　π/6 振れた状態スタートの振れ角

表 2 より評価関数値上は l, $\dot{l}$ をスケジューリングパラメータとした S-GS 制御器 (⑦) が一番低い． しかし，評価関数値，シミュレーション結果においてもそれほど差が見られなく，誤差の範囲以内だといえる．そのため，$\dot{l}$, $\ddot{l}$ をスケジューリングパラメータに含めなくても十分な制御器が設計できるものと考えられる．また，R-LQ 制御器と同様に吊り荷の揺れに影響を受けて出力が振動していることがわかる．

5.3　PDL-GS 制御器

ディスクリプタ表現の枠組みにおいて $\dot{l},\ddot{l}$ を 0 とした場合と，ディスクリプタ表現の枠組みにおいて $\dot{l},\ddot{l}$ を考慮した場合で PDL-GS 制御器を設計し比較を行う．以下の表の括弧内はスケジューリングパラメータである．

表 3　PDL-GS 制御器の評価関数比較

行列 A_d	評価関数 / 制御器の種類	上界値 (γ)	Simulation $(\|G_{zw}\|_2)$
$A_d(l)$	PD Lyapunov GS(ϕ_1)…④	1.2539	1.1859
$A_d(l,\dot{l},\ddot{l})$	PD Lyapunov GS(ϕ_1)…⑨	1.2631	1.1633
	PD Lyapunov GS($\phi_1\phi_2$)…⑩	1.2596	1.1651
	PD Lyapunov GS($\phi_1\phi_2\phi_3$)…⑪	1.2594	1.1875

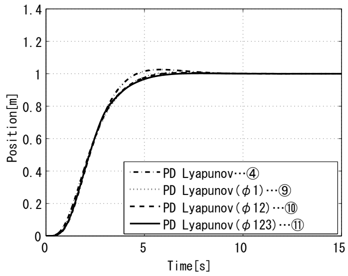

図 13　静止状態スタートの出力

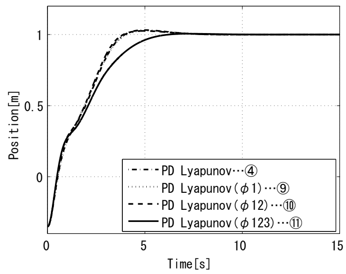

図 14　$\pi/6$ 振れた状態スタートの出力

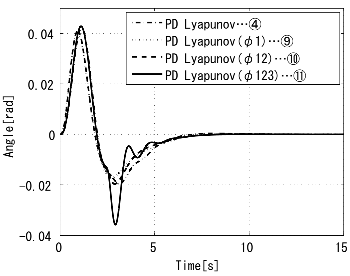

図 15　静止状態スタートの振れ角

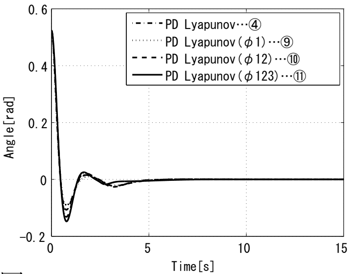

図 16　$\pi/6$ 振れた状態スタートの振れ角

表 3 より評価関数値上は l のみをスケジューリングパラメータとした PDL-GS 制御器 (⑨) が有効であることがわかる．図 15 より,PDL-GS 制御器 (⑪) はスケジューリングパラメータに $\ddot{l}$ を含むため振動している．このことより，$\dot{l}, \ddot{l}$ をスケジューリングパラメータに含める必要はないと考えられる．

5.4　各制御器の比較

LQ 制御器 (①)，ロバスト LQ 制御器 (②)，S-GS 制御器 (⑥)，PDL-GS 制御器 (⑨) の制御器の比較を行う．

表 4　各制御器の評価関数比較

行列 A_d	評価関数 / 制御器の種類	上界値 (γ)	Simulation ($\Vert G_{zw}\Vert_2$)
$A_d(l)$	LQ($l = 0.35$ で固定)…①	1.1829	1.1725
	Robust LQ…②	1.3267	1.2698
$A_d(l,\dot{l},\ddot{l})$	Single Lyapunov GS(ϕ_1)…⑥	1.3369	1.1806
	PD Lyapunov GS(ϕ_1)…⑨	1.2631	1.1633

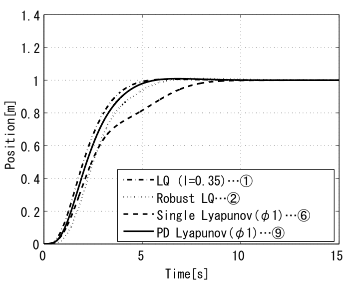

図 17　静止状態スタートの出力

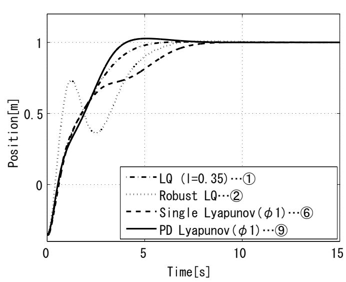

図 18　$\pi/6$ 振れた状態スタートの出力

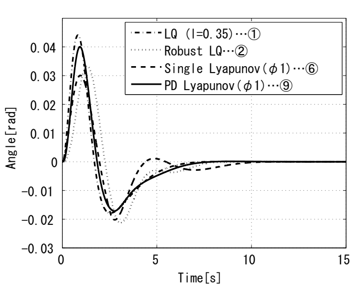

図 19　静止状態スタートの振れ角

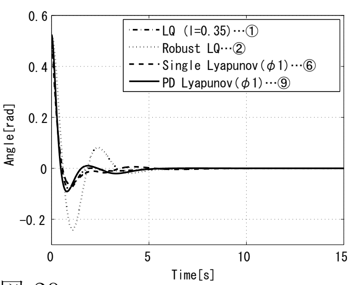

図 20　$\pi/6$ 振れた状態スタートの振れ角

表 4 より評価関数値上は PDL-GS 制御器 (⑨) が有効であることがわかる．シミュレーション結果においても，図 17，図 18 より他の制御器と比べて，PDL-GS 制御器 (⑨) はそれほど影響を受けることなく収束していることがわかる．以上の結果より，吊り荷の振れを考慮し各制御器を比較した場合，一番安定しているものは PDL-GS 制御器 (⑨) であることがわかる．

6　S-GS 制御器の実験結果

l のみをスケジューリングパラメータとした S-GS 制御器 (⑥) について，実験を行いシミュレーションとの比較を行う．

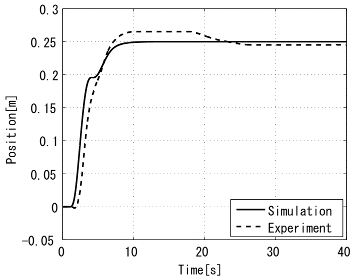

図 21　出力

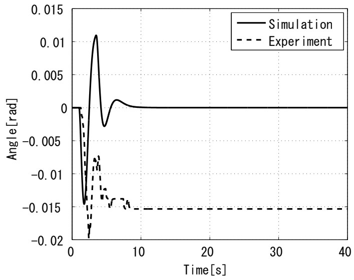

図 22　振れ角

図 21 より摩擦を考慮していないため立ち上がりが遅くなっているが，収束はシミュレーションとほぼ一致している．

7　おわりに

本研究の成果は以下のものである．

- ロープ長の変化速度，加速度 ($\dot{l}, \ddot{l}$) を考慮した制御器を設計をしたこと．
- LFT(線形分数変換) を用いない PDL-GS 制御器を設計したこと．（これまでの研究 [3] では LFT を用いており計算量の増加から実装が難しかった．）
- シミュレーションにおいて S-GS 制御器，PDL-GS 制御器のスケジューリングパラメータにロープ長の変化速度，加速度 ($\dot{l}, \ddot{l}$) を考慮する有効性の検証を行ったこと．
- シミュレーションにおいて各制御器の制御性能の比較を行ったこと．

今後は実験を行い，以上のことを検証する必要がある．

参考文献

[1] 高木 清志，西村 秀和：タワークレーンの吊り荷ロープ長変動を考慮したゲインスケジュールド制御，日本機械学会論文集 (C 編)，**64**-626，3805/3812（1998）

[2] 陳，柴田：ディスクリプタ表現の冗長性を利用したシステム解析，システム/制御/情報：システム制御情報学会誌，**47**-5, 211-216（2003）

[3] Masayuki Jinno，Yuki Ushida，Gan Chen：Gain Scheduling Control for Cranes via Parameter Dependent yapunov Functions , SICE ANNUAL CONFERENCE 2013 conference Proceedings ， SICE , 2013 ， pp.456-461 ， 2013/09 .