極配置を考慮した３自由度ヘリコプタのロバスト安定化

2010SE154 西村祐樹

指導教員：高見勲

1　はじめに

本研究は双線形性を持つ３自由度ヘリコプタを制御対象とし，線形化によるモデル化誤差および重りによる特性変動に対しロバスト安定性を保証する制御系の設計を目的とする．その際，極配置を考慮することにより，より良い応答性を検討する．

2　モデリング

本研究に用いる３自由度ヘリコプタの実験機の概略図を図１に示す．実験機は前後に２つのロータを持ち，支持棒によって土台に固定されている．図１のように，エレベーション角度を ϵ[rad]，ピッチング角度を ρ[rad]，トラベリング角度を λ[rad] とし，前後ロータの入力電圧を V_f[V]，V_b[V]，前後ロータの質量を M_f[kg]，M_b[kg]，カウンターウェイトの質量を M_w[kg]，実験機の中心に載せる重りの質量を M_g[kg]，AC 間の長さを L_a[m]，OC 間の長さを L_b[m]，BC 間の長さを L_w[m]，点 A と各ロータ間の長さを L_h[m]，ロータの揚力定数を K_f[N/V]，重力加速度を g[m/s^2] とし，$\epsilon(t)$，$\lambda(t)$ を目標値に追従させる制御系を設計する．

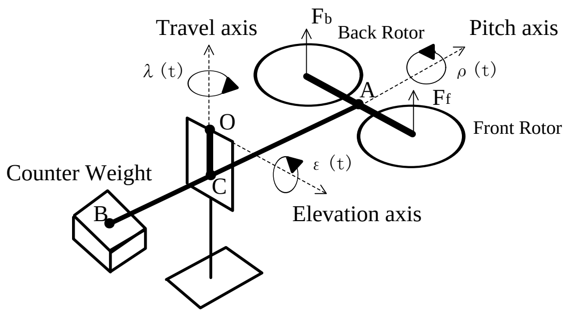

図１ ３自由度ヘリコプタの概略図

$Lagrange$ の運動方程式を用いて非線形運動方程式を導出し，平衡点で周りで線形化すると次の式が得られる．

$$\begin{aligned}\{(M_f+M_b+M_g)(L_a^2+L_b^2)+M_w(L_b^2+L_w^2)\}\ddot{\epsilon}(t) =\\ (V_f(t)+V_b(t))K_f\sqrt{L_a^2+L_b^2}\\ -(M_f+M_b+M_w+M_g)L_b g\epsilon(t)\\ -\{M_f+M_b+M_g)L_a-M_wL_w\}g \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(M_f+M_b)L_h^2\ddot{\rho}(t) =\\ (V_f(t)-V_b(t))K_fL_h \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{(M_f+M_b)(L_a^2+L_h^2)+M_wL_w^2\}\ddot{\lambda}(t) =\\ -(V_f(t)+V_b(t))K_f\sqrt{L_a^2+L_b^2}\rho(t) \quad (3)\end{aligned}$$

ここで，$V_f(t)+V_b(t)$ の微小変動を$\Delta V_f+\Delta V_b[V]$，実験機を水平に保つ入力を $V_{f0}+V_{b0}[V]$ とすると，$V_f(t)+V_b(t)$ は次のようになる．

$$V_f(t)+V_b(t)=V_{f0}+V_{b0}+\Delta V_f+\Delta V_b \quad (4)$$

式 (3) は双線形性があるため，平衡点の周りで線形化すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\{(M_f+M_b)(L_a^2+L_h^2)+M_wL_w^2\}\ddot{\lambda}(t) =\\ -(V_{f0}+V_{b0})K_f\sqrt{L_a^2+L_b^2}\rho(t) \quad (5)\end{aligned}$$

また機体をホバリングさせる入力 $V_{f0}+V_{b0}$ は次式で表される．

$$V_{f0}+V_{b0}=\frac{\{(M_f+M_b+M_g)L_a-M_wL_w\}g}{\sqrt{L_a^2+L_b^2}K_f} \quad (6)$$

式 (6) より式 (5) は次式で表される。

$$\begin{aligned}\{(M_f+M_b)(L_a^2+L_h^2)+M_wL_w^2\}\ddot{\lambda}(t)\\ =-\{(M_f+M_b+M_g)L_a-M_wL_w\}g\rho(t) \quad (7)\end{aligned}$$

3　状態空間表現

状態変数 $x(t)$ を $x(t)=[\epsilon,\rho,\lambda,\dot{\epsilon},\dot{\rho},\dot{\lambda}]^T$，入力 $u(t)$ を $u(t)=[V_f,\ V_b]^T$とする．状態空間表現は次のようになる．

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) & = & Cx(t)\end{array}\right. \quad (8)$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\a_1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&a_2&0&0&0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\b_1&b_1\\b_2&-b_2\\0&0\end{bmatrix} \quad (9)$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix} \quad (10)$$

$$a_1=\frac{-(M_f+M_b+M_w+M_g)L_bg}{(M_f+M_b+M_g)(L_a^2+L_b^2)+M_w(L_b^2+L_w^2)}$$

$$a_2=-\frac{\{(M_f+M_b+M_g)L_a-M_wL_w\}g}{(M_f+M_b)(L_a^2+L_h^2)+M_wL_w^2}$$

$$b_1=\frac{\sqrt{L_a^2+L_b^2}K_f}{(M_f+M_b+M_g)(L_a^2+L_b^2)+M_w(L_b^2+L_w^2)}$$

$$b_2=\frac{L_hK_f}{(M_f+M_b)L_h^2}$$

4　制御系設計

出力を目標値に追従させるため, 積分器を追加した拡大系を導出する．状態変数の拡大系 $x_e(t) = [\epsilon(t), \rho(t), \lambda(t), \dot{\epsilon}(t), \dot{\rho}(t), \dot{\lambda}(t), \int(\epsilon_{ref} - \epsilon)dt, \int(\lambda_{ref} - \lambda)dt]^T$ とすると．拡大系は次の式になる．

$$\dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_e u(t) \tag{11}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} A & O_{6\times2} \\ -C & O_{2\times2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} B \\ O_{2\times2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

5　行列ポリトープ表現

実験機の中心に重りを載せた場合の特性変動に対して，ロバスト安定性を保証する．M_g の変動範囲は

$$M_g \in [M_{g,min},\ M_{g,max}] = [0,\ 0.10] \tag{14}$$

システム行列 A_e，B_e における変動パラメータ M_g を含む a_1，a_2，b_1 の変動範囲は次のようになる．

$$a_1 \in [a_{1,min},\ a_{1,max}] \tag{15}$$

$$a_2 \in [a_{2,min},\ a_{2,max}] \tag{16}$$

$$b_1 \in [b_{1,min},\ b_{1,max}] \tag{17}$$

上記の行列ポリトープ集合を用いてシステム行列A_eの端点をA_{e0}，A_{e1}，A_{e2}，A_{e3}，B_eの端点を B_{e0}，B_{e1}とする．

6　ロバストＬＱ制御

最適レギュレータ問題の可解条件を LMI 条件で表現し，行列ポリトープ表現を用いてロバスト安定化制御器を設計する．状態フィードバック形式のコントローラを $\mathrm{u(t)} = \mathrm{Kx(t)}$ として，評価関数

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t))dt$$

の最小化を行う．LMI 条件は極配置を考慮するための条件を追加し，次のようになる．

$$\begin{bmatrix} He[A_{ei}X + B_{ej}Y] & -X & -Y^T \\ -X & -Q^{-1} & O \\ -Y & O & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{18}$$

$$He[A_{ei}X + B_{ej}Y] + 2\alpha X \prec 0 \tag{19}$$

$$(i = 0, 1, 2, 3)(j = 0, 1)$$

$$\begin{bmatrix} Z & I \\ I & X \end{bmatrix} \succ 0, \gamma - trace(Z) > 0 \tag{20}$$

$$\text{ただし，} P = X^{-1} < Z,\ X > 0,\ J < \gamma$$

また，重み行列 Q，R は次の通りにした．

$$Q = diag[\ 100 \quad 1 \quad 10 \quad 10 \quad 1 \quad 10 \quad 100 \quad 0.5\ ] \tag{21}$$

$$R = diag[\ 0.1 \quad 0.1\ ] \tag{22}$$

極配置を考慮しない場合と,αを設定し極配置を考慮した場合のそれぞれにおいて，状態フィードバックゲイン $K = YX^{-1}$を求める.$\alpha = 0$ のとき，各端点における閉ループの固有値の実部の最大値は，-0.2210 であるため，極配置を考慮する場合は$\alpha = 0.3$ として求めた．極配置を考慮した場合の各端点における閉ループの固有値の実部の最大値は -0.4870 であり，条件を満たしている．

7　シミュレーション

$\alpha = 0.3$ において $M_g = 0$，$M_g = 0.10$ の場合で，エレベーションを目標値$\epsilon(t) = 15$[deg]に追従させるシミュレーションの結果を図 2 に示す．$M_g = 0, Mg = 0.10$ の場合，ともに安定している。また，$M_g = 0.10$ において$\alpha = 0$，$\alpha = 0.3$ の場合のシミュレーション結果を図 3 に示す．極配置を考慮した場合，応答性の向上が見られる．

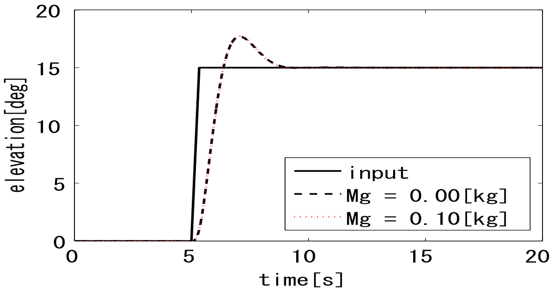

図 2　$M_g = 0$，$M_g = 0.10$ のϵ(t) のシミュレーション

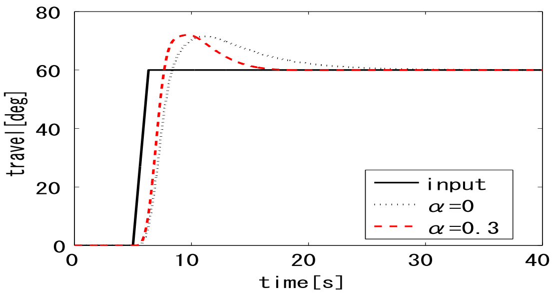

図 3　$\alpha = 0, \alpha = 0.3$ のλ(t) のシミュレーション

8　おわりに

双線形モデルに対して線形化を行い，重りを載せることによる特性変動に対して，極配置を考慮した制御系設計によりロバスト安定性を保証した．また，極配置の考慮による応答性の向上が確認できた．実験機に実装し，シミュレーションと実験との比較，検証が今後の課題である．

9　参考文献

[1] Quanser 3-DOF Helicopter Laboratory Manual2011.

[2] 川田昌克 著，MATLAB/Simulink による現代制御入門，森北出版，東京，2011

[3] 蛯原義雄　著，LMI によるシステム制御 ロバスト制御系設計のための体系的アプローチ，森北出版