記号化による数学文の理解
—線形代数における数学文を中心として—

2010SE201 塩田洋千

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

数学の教科書に記載されている例題や練習問題の中には，単純な計算問題だけでなく，複雑な文章問題も存在する．そのような問題を解く場合には，計算力だけでなく文の意味を読み取る力が必要である．文を読み取るということは，その文を構造的に理解するということである．文を構造的に理解することによって，その文章が何を示しているのか，要するにこの問題文は何を表しているのかが分かりやすくなる．

そこで，本研究では複雑な数学文をどのように読み解いたらよいかを，線形代数における文の記号化を行うことで考えたい．問題を解く前段階として，定義や定理などを理解している必要があるが，それらを表す文についても記号化していく．卒業論文では，[1]，[3] より抽出した 39 例の数学文について，記号化を行った．本稿では，その一部を紹介する．

2 節では，使用する記号や記号化についての手順などを説明し，3 節では，2 節を補足，4 節では実際に文の記号化を行う．

2　記号化について

変数は原則として次のように用いる．ただし，文献からの引用例を示すときは，文献の記号法を優先する．

約束 2.1(変数)

- i，j，m，n，r :正の整数を表す．
- k_1，k_2，$\cdots$:実数を表す．
- x，x_1，$\cdots$，a，a_1，$\cdots$:ベクトルを表す．
- S，S_1，S_2 :ベクトルの集合を表す．
- τ :ベクトルのリストを表す．
- W :$\mathbb{R}^n$ の部分空間を表す．
- s，t :3 種類の記号 (+，ベクトルを表す記号，実数を表す記号) の列を表す．
- p :文を表す．

論理記号，述語記号は，それぞれ表 1，表 2 のように用いる．その他に，演算記号，括弧など，ふつうに用いられている記号をその意味で用いる．例えば，$\langle a_1, a_2, \cdots, a_r\rangle$ は，a_1，a_2，$\cdots$，a_r の 1 次結合で表現できるベクトル全体の集合を表すものとする．また，論理記号の結合の強さは，$\neg$，$\exists x$，$\forall x$ が最も強く，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ が最も弱いと約束して，そこからわかる結合の強さを示す括弧を省略する．

表 1. 使用する論理記号

記号	使用法	意味，訳し方
$\exists$	$\exists x P(x)$	存在する，ある
$\forall$	$\forall x P(x)$	すべての，どんな
$\wedge$	$P \wedge Q$	かつ，さらに
$\vee$	$P \vee Q$	または
$\rightarrow$	$P \rightarrow Q$	ならば，〜のとき
$\leftrightarrow$	$P \leftrightarrow Q$	同値，必要十分
$\neg$	$\neg P$	否定，〜でない

表 2. 使用する述語記号

記号	使用法	意味，訳し方
$\in$	$x \in S$	x は S に属する
$\subseteq$	$S_1 \subseteq S_2$	S_1 は S_2 の部分集合である
LC^*	$LC^*{}_t$ (τ)	t は τ の 1 次結合である
LC	LC_x (τ)	x は τ の 1 次結合で表すことができる
LI	LI(S)	S は 1 次独立である
LD	LD(S)	S は 1 次従属である
GS	$GS_W(\tau)$	τ は W の生成系である
LR	LR_p (τ)	p は τ の線形関係である
VS	VS_K (W)	K は W 上のベクトル空間である
LF	LF (f)	f は線形写像である
$\equiv$	$s \equiv t$	s と t は記号列として等しい

記号化の手順は [2] で述べられている．その手順は，次の通りである．

(1) その文がそのまま記号化できれば，その記号化の結果を目的の記号表現とする．

(2) その文が表 1 の使用法のいずれかの形であれば，論理記号に対応することばをその論理記号に置き換え，その形の P，Q，$P(x)$ 等に対応する文に対して，(1) に戻り記号化を続ける．

(3) その文が表 1 の使用法の形でなく，対応する述語記号が用意されていない場合は，述語記号を追加するか，定義または同値表現により文を変形して，(1) に戻り記号化を続ける (ただし，同値表現に変形する場合は，もとの文にできるだけ忠実な表現を採用する)．

上の (2) において，表 1 の形が読み取りにくい場合には，さらに次の方針で記号化を行う．

(4) 束縛変数 (限定子に伴って表れる変数) の範囲が制限されている場合は，$\forall$ と $\rightarrow$，$\exists$ と $\wedge$ をそれぞれ組み合わせた表現を用いる．

(5) 主語や変数を補って考える．

3　変数を補うことのよさ

卒業論文では，前節 (5) の，変数を補うことのよさについて，次の 3 つを挙げ，その詳細を述べた．

- 変数の示すものの条件が明確になる
- 記号列とその記号列の示す値を区別できる
- 定義文をうまく表現できる

本稿では，このうちの定義文をうまく表現できることについての詳細を述べる．定義文は「P のとき Q という 」の形で表現されることが多い．この表現は，$P \to Q$ の意味だけでなく，その逆 $Q \to P$ の意味も持つ．したがって，記号化は $P \leftrightarrow Q$ である．ここで,「$\sim$ を $\cdots$ という 」の形の定義文を考える．同様に逆の意味も記号化に反映する必要があるが，そのときに変数を補うことのよさが現れる．以下の文を例にして，そのよさを具体的に示す．

> r 個のベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_r$ をそれぞれ k_1 倍，k_2 倍，$\cdots$，k_r 倍したものの和 $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ra_r$ のことをベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_r$ の 1 次結合という

まず，上で述べた逆の意味を考えない場合は，変数を用いないで記号化できて，次のようになる．

$LC^*{}_{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ra_r}(a_1, a_2, \cdots, a_r)$

この記号表現から，変数を用いずに，逆の意味も反映した表現に変形することは難しいと考える．一方，もとの文に変数 t を補うと，

> t が，r 個のベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_r$ をそれぞれ k_1 倍，k_2 倍，$\cdots$，k_r 倍したものの和 $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ra_r$ であるとき，t を，ベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_r$ の 1 次結合という

とできて，ここから，上の逆の意味を含めて，

$\exists k_1 \cdots \exists k_r (t \equiv k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ra_r) \leftrightarrow LC^*{}_t(a_1, a_2, \cdots, a_r)$

と記号化できる．

4　記号化の例

前節までの規則や手順を用い，実際に文を記号化する．ここで挙げる文は，すべて [3] から抽出したものである．

4.1 部分空間 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_r\rangle$ の任意のベクトル x は $a_1, a_2, \cdots, a_r$ の 1 次結合で表される．

記号化 1. $\forall x(x \in \langle a_1, a_2, \cdots, a_r\rangle \to LC_x(a_1, a_2, \cdots, a_r))$

記号化 2. $\forall x(x \in \langle a_1, a_2, \cdots, a_r\rangle \to \exists k_1 \cdots \exists k_r(x = k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ra_r))$

4.2 W の任意のベクトル x が何個かの W のベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_r$ の 1 次結合で表されるとき, そのベクトルの組 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ のことを W の生成系という．

記号化. $\forall x(x \in W \to x \in \langle a_1, a_2, \cdots, a_r\rangle) \leftrightarrow GS_W(a_1, a_2, \cdots, a_r)$

4.3 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W が $a_1, a_2, \cdots, a_r$ を含めば必ずその 1 次結合も含む．

記号化. $(W \supseteq \{a_1, a_2, \cdots, a_r\} \wedge LC_x(a_1, a_2, \cdots, a_r)) \to x \in W$

4.4 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ において，$a_1, a_2, \cdots, a_r$ のうち少なくとも 1 つが零ベクトルならば $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ は 1 次従属である．

記号化. $((a_1 \in \mathbb{R}^n \wedge a_2 \in \mathbb{R}^n \wedge \cdots \wedge a_r \in \mathbb{R}^n) \wedge (a_1 = \mathbf{0} \vee a_2 = \mathbf{0} \vee \cdots \vee a_r = \mathbf{0})) \to LD(\{a_1, a_2, \cdots, a_r\})$

4.5 m 個の与えられたベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_m$ の中から r 個の 1 次独立なベクトル $\{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$ を選び出し, 残りの $(m - r)$ 個のベクトルをこれらの選び出したベクトル $b_1, b_2, \cdots, b_r$ の 1 次結合として表すことができる．

記号化. $\exists b_1 \exists b_2 \cdots \exists b_r(\{b_1, b_2, \cdots, b_r\} \subseteq \{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \wedge LI(\{b_1, b_2, \cdots, b_r\}) \wedge \forall x(x \in (\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} - \{b_1, b_2, \cdots, b_r\}) \to LC_x(b_1, b_2, \cdots, b_r)))$

4.6 $K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ とする．K 上の 2 つのベクトル空間 V と W がある．V から W への写像が線形性を保つとき，すなわち
(1)$a, b \in V \Longrightarrow f(a + b) = f(a) + f(b)$
(2)$a \in V$,c$\in K \Longrightarrow f(\mathrm{c}a) =cf(a)$
が成り立つとき，この写像 f を線形写像と呼ぶ．

記号化. $(K = \mathbb{R} \vee K = \mathbb{C}) \to ((VS_K(V) \wedge VS_K(W) \wedge P) \to ((Q \wedge R) \leftrightarrow LF(f)))$

ただし，P は「 f は V から W への写像である 」，Q は $(a \in V \wedge b \in V) \to f(a + b) = f(a) + f(b)$，$R$ は $(a \in V \wedge$c$\in K) \to f(\mathrm{c}a) =cf(a)$ を表す．

5　おわりに

本研究で扱った数学文は，できるだけ直訳に近い形で記号化した．しかし，特に記号化が 2 通り以上ある数学文については，おそらく別の形で記号化できる方法があると思った．

参考文献

[1] 小寺平治 :『テキスト線形代数』．共立出版，東京，2002.

[2] 佐々木克巳 :『記号表現から理解する数学文の構造と表現法』，2012 年度ソフトウェア工学演習 II 講義資料.

[3] 松本和夫 監修 山原英男 吉松屋四郎 著 :『線形代数』，学術図書出版，東京，2010.