

最短経路問題に対する粘菌アルゴリズムの収束性

2010SE202 白田勉

指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

本研究では、粘菌を用いて輸送ネットワークの最短経路を導き出す数学モデルについて述べる。このモデルは生物学上の観察に基づいており、迷路や地図のような複雑なネットワークの経路探索に使うことができる。

2 最短経路問題をとくアルゴリズム

最短経路問題を解く一番有名な技術にダイクストラ法がある。この方法は正しい最短ルートを発見することができる。しかしノード数が増えるとコンピュータ計算が極端に時間が必要になるというデメリットがある。

3 粘菌による最短経路問題の数学モデル

粘菌に食料源を与えたとき粘菌の一部が食料源の上に集まり二つ、三つの管が結ばれる。粘菌の一部で結ばれた道は迷路の中であっても最短の道である。[2]

過去の実験から下記のことが示されている。

- ・開口管は消滅する可能性が高い。
- ・二つ以上の管が二つの食料源を結ぶとき、長い方の管は徐々に消滅する。

二つの特別なノード、食料源は N_1, N_2 、 N_1 と N_2 の間は M_{ij} と示される。変数 Q_{ij} は M_{ij} を通して N_i から N_j まで変動する。ポアズイユ流れと仮定すれば変動 Q_{ij} は

$$Q_{ij} = \frac{D_{ij}}{L_{ij}}(p_i - p_j) \quad (1)$$

と与えられる。 P_i はノード N_i の圧力、 L_{ij} は M_{ij} の長さ、 D_{ij} は M_{ij} の伝導性である。それぞれのノードにキルヒホフの法則を考察すれば

$$\sum_i Q_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (2)$$

が与えられる。もとのノード N_1 と受信側のノード N_2 から二つの方程式

$$\sum_i Q_{i1} + I_0 = 0 \quad (3)$$

$$\sum_i Q_{i2} - I_0 = 0 \quad (4)$$

が得られる。 I_0 はもとのノードから流れてくる。このモデルで I_0 は定数であることに注意しなければならない。伝導性 D_{ij} は時間で変化する。変数 Q_{ij} によれば次のように表される

$$\frac{d}{dt} D_{ij} = f(|Q_{ij}|) - r D_{ij} \quad (5)$$

$f(Q) = \alpha|Q|$ より

$$\frac{d}{dt} D_{ij} = \alpha|Q_{ij}| - r D_{ij} \quad (6)$$

$f(Q)$ は増加関数で $f(0) = 0$ 。この方程式から伝導性が急激に減少する傾向にあることが示される。

(1)-(3) の式より、

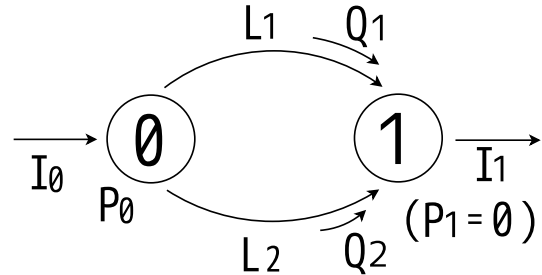
$$\sum_i \frac{D_{ij}}{L_{ij}}(p_i - p_j) = \begin{cases} -I_0 & j = 1 \\ I_0 & j = 2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (7)$$

$P_2 = 0$ とおくと、(5) 式よりすべての P_i と $Q_{ij} = \frac{D_{ij}}{L_{ij}}(p_i - p_j)$ をそれぞれ確定することができる。

ここで注意することがある。 D_{ij} は (4) 式によって変化する一方で、例えばさまざまな p_i や Q_{ij} はそれぞれの瞬間の D_{ij}, L_{ij} により (5) 式を解き、明確にすることによって確定される。

伝導性は管の厚さ、管の消滅に密接に関わっている。

4 経路探索の実演



I_0 : 流入する流量 I_1 : 流出する流量 L : 辺の長さ Q : 流量 P_i : 頂点 i の圧力

節点 1 を圧力の基準点とし、 $P_1 = 0$ とおく。流入する流量と流出する流量は一致している。

(1) 式より

$$Q_1 = \frac{D_1}{L_1}(p_0 - p_1) = \frac{D_1}{L_1} p_0 \quad (8)$$

$$Q_2 = \frac{D_2}{L_2}(p_0 - p_1) = \frac{D_2}{L_2} p_0 \quad (9)$$

と示される。これより、節点 0 の圧力 p_0 を求めることができる。

$$Q_1 + Q_2 = I_0 \quad \left(\frac{D_1}{L_1} + \frac{D_2}{L_2}\right) p_0 = I_0$$

$$p_0 = \frac{I_0}{\frac{D_1}{L_1} + \frac{D_2}{L_2}} \quad (10)$$

伝導性 D_1, D_2 は

$$\frac{d}{dt}D_1 = \alpha \left| \frac{D_1}{L_1} \frac{I_0}{\frac{D_1}{L_1} + \frac{D_2}{L_2}} \right| - rD_1 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}D_2 = \alpha \left| \frac{D_2}{L_2} \frac{I_0}{\frac{D_1}{L_1} + \frac{D_2}{L_2}} \right| - rD_2 \quad (12)$$

となる。それぞれを $f(D_1, D_2)$, $g(D_1, D_2)$ として、 $f(D_1, D_2) = 0$, $g(D_1, D_2) = 0$ をみたす平衡点 (D_1, D_2) を探す。

$D_1 = 0, D_2 = 0, (D_1, D_2) = 0$ の場合を考えると (11), (12) の式がそれぞれ

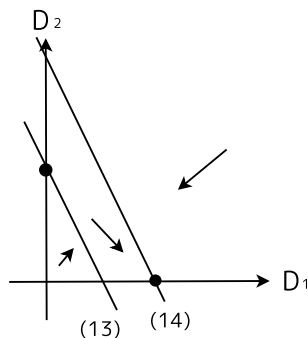
$$D_1 \left(\alpha \frac{I_0 L_2}{L_2 D_1 + L_1 D_2} - r \right) = 0 \quad (13)$$

$$D_2 \left(\alpha \frac{I_0 L_1}{L_2 D_1 + L_1 D_2} - r \right) = 0 \quad (14)$$

と変形することができる。そしてここから解を求めると、

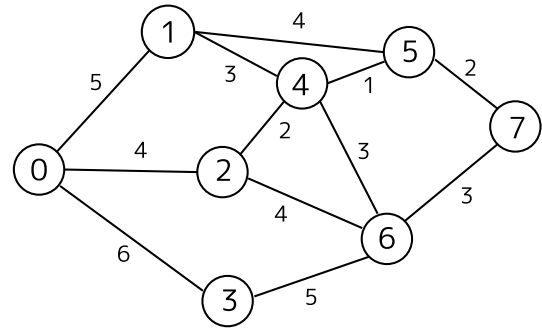
$$\begin{aligned} (D_1, D_2) &= \left(0, \frac{\alpha}{r} I_0 \right) \\ &= \left(\frac{\alpha}{r} I_0, 0 \right) \end{aligned}$$

具体的にパラメータを $\alpha = r = 1$, $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $I_0 = 1$ において考えると、平衡点 $(1, 0), (0, 1)$ で下の図のようになる。



上記の図は三つの範囲に分かれている。 Δt 秒後に、 D_1 軸、 D_2 軸、(13) 式で囲まれた範囲は++方向、(13) 式と (14) 式の間は+-方向、それ以外の範囲は-方向に動く。つまりどの点においても最終的には $(1, 0)$ に収まる。よって $(1, 0)$ が距離が短いルートだと分かる。

次にノード数を増やした複雑な経路の問題を考える。下記の図の各ノードに対してランダムに伝導性を与える。図の最短経路は、0-2-4-5-7 であるが、伝導性をランダムで与えてもこのようになるかをプログラムを用いて調べる。



srand48(50)

d[0][1]=0.710943, d[0][2]=0.979425, d[0][3]=0.018650,
d[0][4]=0.146505, d[0][5]=0.986598, d[0][6]=0.584182,
d[0][7]=0.461962.

d[1][2]=0.452157, d[1][3]=0.703557, d[1][4]=0.804022,
d[1][5]=0.704205, d[1][6]=0.334573, d[1][7]=0.734250.

d[2][3]=0.457446, d[2][4]=0.222292, d[2][5]=0.615298,
d[2][6]=0.825747, d[2][7]=0.615784.

d[3][4]=0.263695, d[3][5]=0.956441, d[3][6]=0.767507,
d[3][7]=0.157245.

d[4][5]=0.612721, d[4][6]=0.521288, d[4][7]=0.772524.

d[5][6]=0.022071, d[5][7]=0.035796.

d[6][7]=0.697342.

実行結果

q[0][1]=0.094303 q[0][2]=0.903521 q[0][3]=0.002176

q[1][4]=0.029543 q[1][5]=0.064760

q[2][4]=0.776673 q[2][6]=0.126848

q[3][6]=0.002176

q[4][5]=0.806148 q[4][6]=0.000069

q[5][7]=0.870907

q[6][7]=0.129093

各節点からあるいくつかの道の中から数値が1に近い道をたどるルートが答えである。

0-2-4-5-7 のルートをたどっているので伝導性をランダムで与えても最短のルートを選ぶことがわかる。

5 おわりに

本研究では、粘菌を使った最短経路探索問題を数学モデル化した。簡単な経路を使った問題では、モデル化した式をしていき具体的にパラメータを与えることでグラフとして表すことができ、短い方の道へと収束することがわかった。ノード数を増やした問題ではまず伝導性の値をランダムに与え、どのような値であっても最短の道を選ぶのかを調べ、いかなる数値が与えられた場合でも最短の道に収束した。

参考文献

[1] 中垣俊之 著: 『粘菌 その驚くべき知性』, PHP サイエンス・ワールド新書 (2010).

[2] Atsushi Tero, Ryo Kobayashi, Toshiyuki Nakagaki: Physarum solver, A biologically inspired method of road-network navigation (2006)