インパルス制御による円軌道上のフォーメーション

2010SE261 若園直志　2010SE262 鷲野友紀

指導教員：市川朗

1　はじめに

複数の人工衛星によるフォーメーションフライトにより, 高精度な観測や, 種々のミッションが可能となる. 飛行中の人工衛星には, 燃料が補給できないため, 低燃費の運用が必要となる. 2007 年に日本で打ち上げられたかぐや (SELENE) がフォーメーションフライトの例として挙げられる. かぐやは主衛星としておきな (OKINA)・おうな (OUNA) と呼ばれる従衛星と共にフォーメーションフライトを行い, 月の地表や, 元素・鉱物組成の調査を行った. 本研究では, フォーメーションフライトで一般的に用いられているパルス制御ではなく, インパルス制御を用いる. パルス制御とは, 一定時間に入力を与える離散時間型の制御方法で, インパルス制御とは, 瞬間的に入力を与える離散時間型の制御方法である. 研究課題として, 燃料消費と比例関係にある総速度変化 (ΔV) を抑えた制御を行うことにより, 燃費の向上を目指す. 連続時間型のフィードバック制御を比較対象とし, インパルス制御と燃料消費の観点から比較を行う.

2　相対問題の方程式

半径 R_0 の円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動を考えるため, 主衛星の重心を原点とする図 1 の回転座標系 o - $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ を考える.

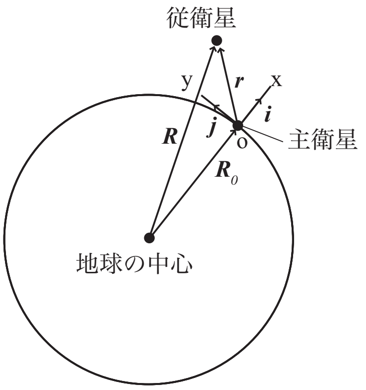

図 1　円軌道上の主衛星

このとき相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とすると, 運動方程式より,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2(R_0+x) - \frac{\mu}{R^3}(R_0+x) + u_x\\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2 y - \frac{\mu}{R^3}y + u_y\\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3}z + u_z\end{aligned} \tag{1}$$

が得られる. ここで, $\boldsymbol{u}= [u_x\ u_y\ u_z]^T$ は従衛星に働く加速度, $R = [(R_0+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$ である. (1) を原点 $x = y = z = 0$ で線形化すると,

$$\begin{aligned}&\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x = u_x\\ &\ddot{y} + 2n\dot{x} = u_y\\ &\ddot{z} + n^2 z = u_z\end{aligned} \tag{2}$$

が得られる. (2) は HCW 方程式と呼ばれる [1],[2].
HCW 方程式の状態方程式は,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} \tag{3}$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2n & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

である. 軌道面内と軌道面外の解は独立している. 加速度を $\boldsymbol{u}$=$[0\ 0\ 0]^T$ とし, 面内の初期値を $\boldsymbol{x_0}_{in}$=$[x_0\ y_0\ \dot{x_0}\ \dot{y_0}]^T$ とすると面内運動の解は,

$$\begin{aligned}x(t) &= 4x_0 + 2\dot{y_0}/n - (3x_0 + 2\dot{y_0}/n)\cos nt\\ &\quad +(\dot{x_0}/n)\sin nt\\ y(t) &= y_0 - 2\dot{x_0}/n + (2\dot{x_0}/n)\cos nt\\ &\quad +(6x_0 + 4\dot{y_0}/n)\sin nt - (6nx_0 + 3\dot{y_0})t\\ \dot{x}(t) &= \dot{x_0}\cos nt + (3nx_0 + 2\dot{y_0})\sin nt\\ \dot{y}(t) &= (6nx_0 + 4\dot{y_0})\cos nt\\ &\quad -2\dot{x_0}\sin nt - (6nx_0 + 3\dot{y_0})\end{aligned} \tag{4}$$

で与えられる. 面外の初期値を $\boldsymbol{x_0}_{out}$=$[z_0\ \dot{z_0}]^T$ とする面外運動の解は,

$$\begin{aligned}z(t) &= z_0\cos nt + (\dot{z_0}/n)\sin nt\\ \dot{z}(t) &= -nz_0\sin nt + \dot{z_0}\cos nt\end{aligned} \tag{5}$$

である. (4), (5) の式をパラメータ表現すると

$$\begin{aligned}x(t) &= 2c + a\cos(nt+\alpha)\\ y(t) &= d - 3nct - 2a\sin(nt+\alpha)\\ z(t) &= b\cos(nt+\beta)\end{aligned} \tag{6}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}&a = [(3x_0 + 2\dot{y_0}/n)^2 + (\dot{x_0}/n)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad b = [z_0^2 + (\dot{z_0}/n)^2]^{\frac{1}{2}}\\ &c = 2x_0 + \dot{y_0}/n, \quad d = y_0 - 2\dot{x_0}/n\\ &\sin\alpha = -\dot{x_0}/na, \quad \sin\beta = -\dot{z_0}/nb\\ &\cos\alpha = -(3x_0 + 2\dot{y_0}/n)/a, \quad \cos\beta = z_0/b\end{aligned}$$

である.
面内運動は $c = 2x_0 + \dot{y_0}/n = 0$ を満たすとき周期解となり, この条件を CW 条件と呼ぶ. フォーメーションフライトでは従衛星をこの周期解にのせる.

3　インパルス制御

本章ではインパルスについて説明する．状態方程式,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0}$$

を解くと,

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-r)}B\boldsymbol{u}(r)dr \tag{7}$$

となる．(7) を用いて, 時間 τ においてインパルス入力 $\boldsymbol{u}_\tau$ を入れたときの応答を求めるために, パルス応答を考える．区間 $[\tau, \tau+h]$ において一定入力 $\frac{\boldsymbol{u}_\tau}{h}$ を与えたときの応答は,
$t < \tau$ のとき,

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0$$

$t > \tau + h$ のとき,

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + e^{At}\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h} e^{-Ar}B\boldsymbol{u}_\tau dr \tag{8}$$

となる．区間 $[\tau, \tau+h]$ での入力の積分は一定値 $\boldsymbol{u}_\tau$ となる．ここで h を 0 に近づけたときの極限を, 時間 τ におけるインパルス $\boldsymbol{u}_\tau$ の応答と呼ぶ．(8) より, インパルス入力を加えたときの応答は,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= e^{At}\boldsymbol{x}_0 + e^{At}e^{-A\tau}B\boldsymbol{u}_\tau \\ &= e^{At}\boldsymbol{x}_0 + e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}_\tau \end{aligned} \tag{9}$$

である．次に一定時間ごとにインパルスを入力する．時間 $k\tau$ にインパルス入力 $\boldsymbol{u}_{k-1}$ を加えるとし, $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}(k\tau+)$ とおく．(9) を用いて,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{x}(\tau+) = e^{A\tau}\boldsymbol{x}_0 + B\boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{x}_{k+1} &= e^{A\tau}\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k \end{aligned} \tag{10}$$

となる．本研究では, 1 周期に λ 回のインパルス入力を考える．周期を T とおくと $\tau = \frac{T}{\lambda}$ となる．$A_d = e^{A\frac{T}{\lambda}}$ とおくと (10) は,

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_d\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k \tag{11}$$

であり, 入力を加えた直後の状態を表す漸化式が得られる．

4　最適レギュレータ

最適レギュレータでは, 以下のシステムと評価関数を考える．

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_d\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$J(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=0}^{\infty}[\boldsymbol{x}^T(k)Q\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^T(k)R\boldsymbol{u}(k)] \tag{12}$$

(12) を最小にする $\boldsymbol{u}(k)$ は, 離散時間リッカチ代数方程式,

$$X = Q + A_d^TXA_d - A_d^TXB(R + B^TXB)^{-1}B^TXA_d$$

を用いて, $\boldsymbol{u}_k = -K\boldsymbol{x}_k$ となる [3]．ここで K は,

$$K = (R + B^TXB)^{-1}B^TXA_d$$

目標軌道の自由運動, 目標軌道の初期値を $\boldsymbol{x_f}_0$ とすると,

$$\boldsymbol{x_f}_{k+1} = A_d\boldsymbol{x_f}_k, \qquad \boldsymbol{x_f}(0) = \boldsymbol{x_f}_0 \tag{13}$$

となり, (11) を用いて (13) への移行を考える．誤差を $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x_f}_k$ とすると,

$$\boldsymbol{e}_{k+1} = A_d\boldsymbol{e}_k - B\boldsymbol{u}_k, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{14}$$

となる．ここで $\boldsymbol{u}_k = -K\boldsymbol{e}_k$ を用いることにより, 誤差 $\boldsymbol{e}_k$ は 0 に収束し, 目標の軌跡に追従する．

5　シミュレーションの準備

本研究では (1), (2) を軌道半径 R_0 および円軌道の角速度 n を用いて無次元化する．ここで $n = \sqrt{\mu/{R_0}^3}$ である．また時間 t を $\sigma = t/(1/n)$ とおき, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (x/R_0, y/R_0, z/R_0)$, $(\overline{u}_x, \overline{u}_y, \overline{u}_z) = (1/R_0n^2)(u_x, u_y, u_z)$ とすると, 状態方程式は

$$\overline{\boldsymbol{x}}' = \overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} + B\overline{\boldsymbol{u}}, \qquad \overline{\boldsymbol{x}}(0) = \overline{\boldsymbol{x}}_0$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

と表すことができ, (11) より, $\overline{A}_d = e^{\overline{A}\frac{2\pi}{\lambda}}$ であり,

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \overline{A}_d\overline{\boldsymbol{x}_k} + B\overline{\boldsymbol{u}}_k$$

となる．

6　シミュレーション

6.1　総速度変化

本研究では, 従衛星の初期値を $\boldsymbol{x_s}_0$=[0.01 0 0 -0.02 0.01 0]^T, 目標軌道の初期値を $\boldsymbol{x_f}_0$=[0.005 0 0 -0.01 0.005 0]^T と設定した．本節では ΔV の変化を見るため, インパルス入力回数を 1 周期に 4 回とする．
最適レギュレータによって設計された制御系を評価する方法として, 燃料消費と比例関係にある ΔV と収束するまでの時間, 整定時間 ST を用いる．本研究では, 整定時間は, 制御軌道と目標軌道の誤差が 10^{-4} 以下になる時間とする．
総速度変化 ΔV を面内運動 ΔV_{in}, 面外運動 ΔV_{out} に分けて表すと,

$$\Delta V_{in} = \sum_{k=1}^{ST}\overline{u}_{ink} \qquad \overline{u}_{in} = \sqrt{\overline{u}_x^2 + \overline{u}_y^2}$$

$$\Delta V_{out} = \sum_{k=1}^{ST}|\overline{u}_{zk}|$$

となる．ΔV の変化をみるため，今回最適レギュレータで用いた重み行列 Q を $Q = 10I_6$ で固定し，重み行列 R を $R = 10^r I_3$ の r を変化させる．このときの ΔV のグラフを図 2 に表す．

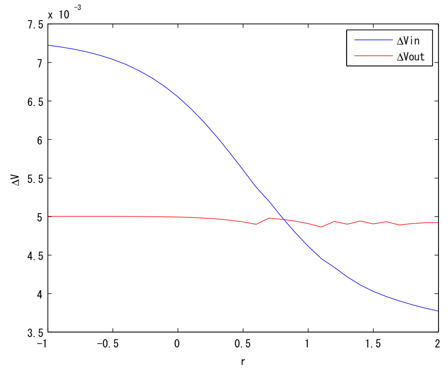

図 2　r の変化に伴うインパルス制御の ΔV の推移

図 2 より，r の増加に伴って操作量が制限され，ΔV_{in} を抑えて，燃料の消費を抑えていることが分かる．一方，ΔV_{out} の変化は小さい．これは面外運動が r に依存せず，早く収束してしまうからだと考えられる．次に，r の変化に伴う整定時間の推移を図 3 に表す．

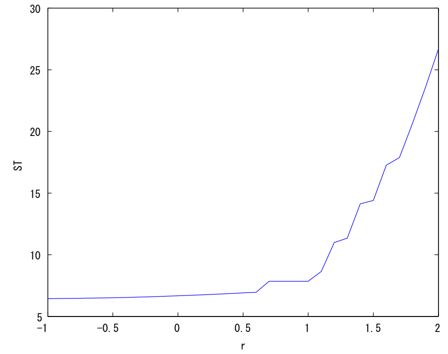

図 3　r の変化に伴う整定時間の推移

図 3 より，r の増加，つまり燃料の消費を抑えることにより，収束する時間は長くなることが分かる．

6.2　入力回数

本章では，最も ΔV を抑えられる入力回数を探す．入力回数を 1 から 10 回まで変化させたグラフと値を図 4 と表 1 に表す．

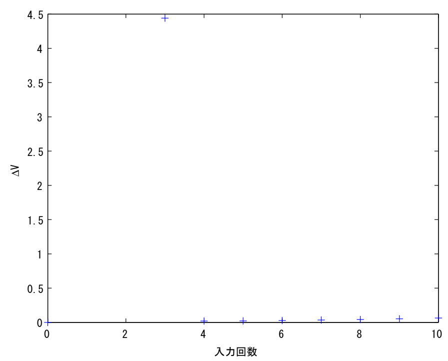

図 4　入力回数の変化による ΔV の推移

表 1　入力回数の変化による ΔV

回数	4	5	6	7	8	9	10
ΔV	0.019	0.021	0.027	0.035	0.042	0.052	0.064

1,2 回の入力は可制御ではなくなる．3 回の場合は収束するが，目標軌道の内側を通過し，ΔV の値が大きくなるため除外した．5 回以上の入力を行っていくと徐々に ΔV が上がっていってしまうため，数値的にも 4 回が最も優れているということが確認できた．

6.3　重み行列

前節で求めた入力回数を用いて，より燃料消費を抑えるため，ΔV を抑える重み行列を探す．入力に対する重み行列 R を $R = 10^r I_3$ とし，r を -1 から 2 まで変化させつつ，状態に対する重み行列 Q を

$$Q = 10 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

とし，速度成分の p を変化させていく．
Q を変化させたときに，各値が R の範囲で最も ΔV を抑えた値と整定時間のグラフを図 5 と図 6 に表す．

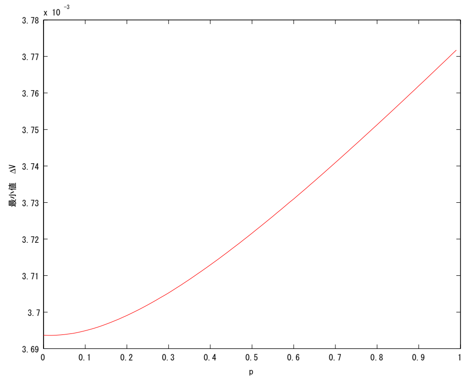

図 5　Q の変化に伴う ΔV の推移

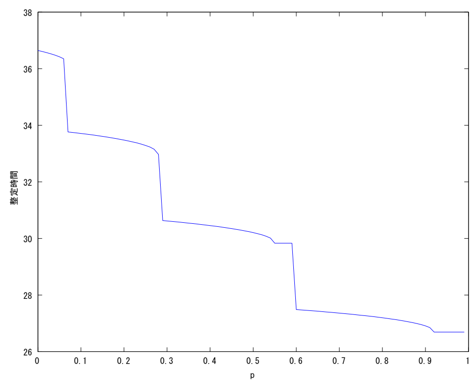

図 6　Q の変化に伴う整定時間の推移

図 5 と図 6 の結果より, ΔV を抑え, なおかつ整定時間も短くする値は, $p = 0.07$ であり, r は $r = 2$ である. また, このときの ΔV は 3.70×10^{-3} で, 整定時間は 33.76 であった. この重み行列を用いて, 連続時間型フィードバック制御との比較を行う.

7 連続時間型フィードバック制御との比較

本節ではインパルス制御と, 連続時間型フィードバック制御を比較する. 対等な条件下で比較するため, インパルス制御の時と同様, 連続時間型フィードバック制御に対しても, ノルムを抑えつつ, 整定時間も考慮した重み行列 Q を探す.
Q を変化させたときに, 各値が R の範囲で最も L_1 ノルムを抑えた値と整定時間をとったグラフを図 7 と図 8 に表す.

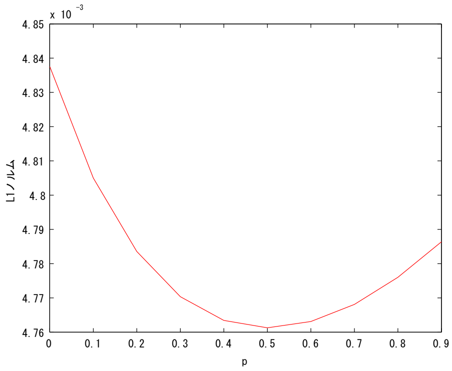

図 7 Q を変化させた時の L_1 ノルムのグラフ

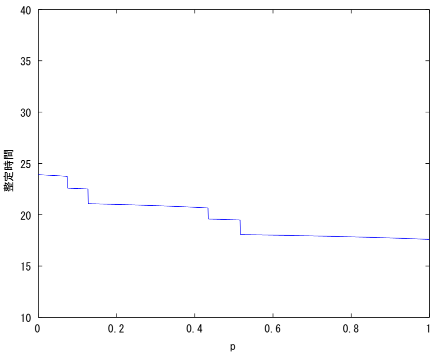

図 8 Q を変化させた時の整定時間のグラフ

図 7, 図 8 より, L_1 ノルムを抑えつつ, 整定時間を短くする p は $p = 0.52$ で r は $r = 2$ である. また, このときの L_1 ノルムは 4.80×10^{-3} で, 整定時間は 18.06 であった.
以上の値を元に, インパルス制御と連続時間型フィードバック制御の性能を比較した結果, インパルス制御の方が燃料消費を抑えられることが分かった. また最後に収束周期を 5 周期以内と設定し, ΔV と L_1 ノルムの比較を行った. 横軸を整定時間, 縦軸を ΔV と L_1 ノルムとしたグラフと収束周期を 5 周期以内としたときの値を図 9 と表 2 に示す.

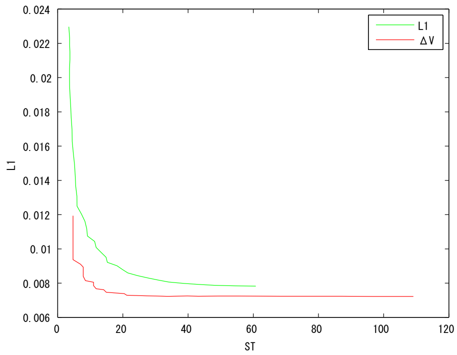

図 9 L_1 ノルムと ΔV の比較

表 2 インパルス制御と連続型制御の比較

名称	面内	面外	整定時間
インパルス	3.70×10^{-3}	4.88×10^{-3}	30.63
連続型制御	4.80×10^{-3}	6.17×10^{-3}	18.06

表 2 より, 整定時間 5 周期以内で最も ΔV,L_1 ノルムを抑えたものを比べると, インパルス制御の方が燃料消費を抑えられることが表 2 からも分かる. 仮に整定時間を短くすることを目的とするならば, 連続型制御の方が優れていると考えられる.

8 おわりに

インパルス制御によるフォーメーションについて研究を行った. フォーメーションフライトは現在, 高精度な観測を行えるという利点から, 徐々に宇宙活動の際に用いられ始めている手法の一つである. そのため研究題材として扱った. 連続時間型フィードバック制御, インパルス制御それぞれに燃料消費を抑えるために適した重み行列 Q を設定した. それにより, 両制御が燃料消費を限りなく抑えられるような条件でシミュレーションを行った結果, 燃料消費を抑えられる制御は, インパルス制御であるということが分かった.

参考文献

[1] M.Shibata and A.Ichikawa:Orbital Rendezvous and Flyaround Based on Null controllability with Vanishing Energy, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.30,No.4,pp.934-945,2007.

[2] B.Wie:Space Vehicle Dynamics and Control,AIAA Education Series,Reston,Virginia,1998.

[3] Arnold, W.F.,III and A.J. Laub:Generalized Eigenproblem Algorithms and Software for Algebrai Riccati Equations, Proc. IEEE, 72(1984), pp.1746-1754.