仮想受動関節モデルを用いたフレキシブルアームのモデル検証

2009SE121 北島大己 2009SE125 小林勇貴
指導教員:陳幹

1 はじめに

近年, 産業用ロボットなどに用いられているロボットアームは運搬コストや材料コストが考慮され, アームを軽量化することが望まれる. しかしながら軽量化に伴い, アーム自身の剛性が低下し, 加減速時にアームの先端に振動や歪みが誘発されてしまう. これらの現象はロボットの性能低下に繋がるため, 振動を素早く減衰させ, 位置決め精度を確保する必要がある [1]. 本研究では, アームを, 仮想受動関節であるばねによって結合された剛体リンクと考えてモデリングを行い. そのモデルと, 単純化モデルを比較し, 検証を行う. 手順として, まずアームのたわみ角度に相当する角度 α の比較, そして最終的にはシステムのゲイン余裕と, 位相余裕についての比較を行っていく. 次の図に今回比較する二つのモデルについて示す. 図 1 は単純化モデルの図で, 図 2 は 2 リンクモデルを例にした, 仮想受動関節モデルの図である. アームを 2 リンク, 3 リンク, 4 リンクと分割したモデルに対して, 分割数を変えることによってどのような違いが生じるかを比較する.

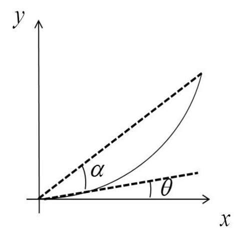

図 1 単純化モデル

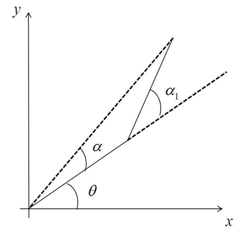

図 2 2 リンク仮想受動関節モデル

2 システム同定

アームの剛性には, 減衰固有角周波数を用いる. その測定方法として, まず, フレキシブルアームのアーム部を取り外し, 校正台に取り付ける. そして, その状態でアームを適当な初期値を与えて離す. その波形の周波数を測定し, 周波数を 2π 倍したものが減衰固有角周波数であり, (1) となる.

$$\omega = 20.1060 \tag{1}$$

本研究で扱う DC モータ電気回路図の概略図は図 3 である [2].

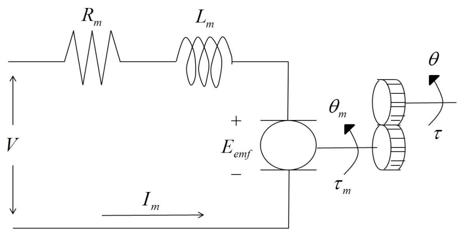

図 3 DC モータ概略図

実際に制御するにあたり, 直接操作できるのはトルクではなく, モータに与える電圧である. モータに与える電圧 V と τ との関係を (2) に示す.

$$\tau = \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g (V - K_m K_g \dot{\theta})}{R_m} \tag{2}$$

本研究で使用するフレキシブルアームは仕様書と文献 [1] より, 表 1 のパラメータは既に判明している.

表 1 パラメータ

記号	名前	値
L	フレキシブルアームの長さ	$0.422[m]$
M	フレキシブルアームの質量	$0.065[kg]$
I_0	hub の慣性モーメント	$0.002[kgm^2]$
R_m	モータ電機抵抗	$2.6[\Omega]$
K_m	逆起電力係数	$0.00767[V/(rad/s)]$
K_t	モータトルク定数	$0.00767[Nm/A]$
B_{eq}	等価粘性減衰係数	$0.004[V/(rad/s)]$
K_g	システムギヤ比	70
η_g	ギヤボックス効率	0.9
η_m	モータ効率	0.69

3 2 リンク仮想受動関節モデル

仮想受動モデルによるモデリングは, 関節部のばねによって結合された剛体リンクの連結により, フレキシブルアームを近似する方法である. アームを仮想受動関節を用いて 2 分割したモデルを図 4 に示す. ここでは, アームを同じ長さの 2 本の仮想剛体リンクと 1 つの仮想受動関節でモデリングし, 仮想受動関節角度を α_1 で示した. モータに直接つながっているアームを 1 リンク,

仮想受動間節によりつながっているものを 2 リンクとする．モータの慣性モーメントを I_0, 1 リンクの慣性モーメントを I_1, 2 リンクの慣性モーメントを I_2, 仮想受動間接のばね定数を K_{stiff}, hub にかかる粘性減衰係数を B_{eq} とする．また, 単純化モデルと比較を行うアームのたわみ角度を α とする．

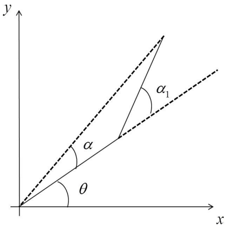

図 4　2 リンク仮想受動関節モデル

アームのたわみ角度 α は

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha_1 (0 < \alpha_1 < \pi) \tag{3}$$

となる．オイラー・ラグランジュの運動方程式をフレキシブルアームに適用するため, 運動エネルギー T, 位置エネルギー U, 損失エネルギー D を求める．

$$T = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha_1}^2) \tag{4}$$

$$U = \frac{1}{2}K_{1stiff}\alpha_1^2 \tag{5}$$

$$D = B_{eq}\dot{\theta}^2 \tag{6}$$

与えられたエネルギーをオイラー・ラグランジュの運動方程式に適用し, システムの状態ベクトル x を $[\theta\ \alpha_1\ \dot{\theta}\ \dot{\alpha}_1\ ]$, 制御入力を V とした状態空間表現が得られる．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta\\ \alpha_1\\ \dot{\theta}\\ \dot{\alpha}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{K_{stiff1}}{I_0+I_1} & -a^{(*)} & 0\\ 0 & -\frac{K_{stiff1}(I_0+I_1+I_2)}{(I_0+I_1)I_2} & a^{(*)} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \alpha_1\\ \dot{\theta}\\ \dot{\alpha}_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\eta_g\eta_m K_t K_g}{R_m(I_0+I_1)} & -\frac{\eta_g\eta_m K_t K_g}{R_m(I_0+I_1)}\end{bmatrix}^T V \tag{7}$$

$a^{(*)} = \frac{R_m B_{eq} + \eta_g\eta_m K_t K_g^2 K_m}{R_m(I_0+I_1)}$

全質量を M, 棒の長さ L, 綿密度 λ, 微笑線素片 ds, 線素までの距離を s の細い一様な棒の慣性モーメントについて考える．$\lambda = \frac{M}{L}$ であるので, 棒の慣性モーメントを J とした時

$$J = \int_0^L \lambda s^2 ds = \lambda\frac{1}{3}L^3 = \frac{ML^2}{3} \tag{8}$$

となる．式 (8) を用いて, 慣性モーメント I_1, I_2 を導出する．リンク 1, リンク 2 は同様な細い一様な棒であり, 長さ $\frac{1}{2}L$, 重さ $\frac{1}{2}M$ なので

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}M * (\frac{1}{2}L)^2 = \frac{1}{24}ML^2 = 0.00048 \tag{9}$$

となる．バネ定数 K_{1stiff} は, リンクとリンクを繋ぐ仮想受動間節であり, アームのたわみ, つまりアームの剛性に相当する．ロータリースプリングの運動はニュートンの運動方程式より式 (10) となる [?].

$$I_2\ddot{\alpha}_1 = -K_{1stiff}\alpha_1 \tag{10}$$

減衰固有角周波数 ω_c と α_1 の間には常に以下の関係が成立する．

$$\ddot{\alpha}_1 = -\omega_c^2\alpha_1 \tag{11}$$

式 (10), (11) より式 (12) が得られる．

$$K_{1stiff} = \omega_c^2 I_2 \tag{12}$$

式 (1), (9) よりバネ定数 K_{1stiff} は

$$K_{1stiff} = (20.1060)^2 * 0.00048 = 0.1904 \tag{13}$$

となる．

4　3 リンク仮想受動関節モデル

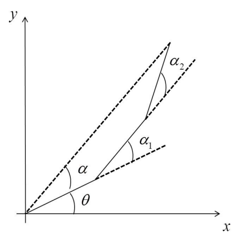

図 5　3 リンク仮想受動関節モデル

アームのたわみ角度 $\alpha(0 < \alpha_1 + \alpha_2 < \pi)$ は

$$tan\alpha = \frac{\frac{L}{3}(sin\alpha_1 + sin\alpha_2)}{\frac{L}{3}(1 + cos\alpha_1 + cos\alpha_2)}$$

$$\alpha = tan^{-1}\frac{sin\alpha_1 + sin\alpha_2}{1 + cos\alpha_1 + cos\alpha_2} \tag{14}$$

となる．オイラー・ラグランジュの運動方程式をフレキシブルアームに適用するため, 運動エネルギー T, 位置エネルギー U, 損失エネルギー D を以下のように定義する．

$$T = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha_1}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha_1}^2 + \dot{\alpha_2}^2) \tag{15}$$

$$U = \frac{1}{2}K_{1stiff}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}K_{2stiff}\alpha_2^2 \tag{16}$$

$$D = B_{eq}\dot{\theta}^2 \tag{17}$$

I_3:Link3 に働く慣性モーメント
与えられたエネルギーをオイラー・ラグランジュの運動方程式に適用し, 状態ベクトル x を $[\theta\ \alpha_1\ \alpha_2\ \dot{\theta}\ \dot{\alpha}_1\ \dot{\alpha}_2]$, 制御入力を V とした状態空間表現が得られる．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta & \alpha_1 & \alpha_2 & \dot{\theta} & \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2\end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{1stiff}}{I_0+I_1} & 0 & -a^{(*)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_{1stiff}(I_0+I_1+I_2)}{(I_0+I_1)I_2} & \frac{K_{2stiff}}{I_2} & a^{(*)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{1stiff}}{I_0+I_1} & -\frac{K_{2stiff}(I_2+I_3)}{I_2 I_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta & \alpha_1 & \alpha_2 & \dot{\theta} & \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{R_m(I_0+I_1)} & -\frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{R_m(I_0+I_1)} & 0 \end{bmatrix}^T V \quad (18)$$

$a^{(*)} = \frac{R_m B_{eq} + \eta_g \eta_m K_t K_g^2 K_m}{R_m(I_0+I_1)}$

2 リンク時に各パラメータを導出した方法に基づいて, 3 リンクの I_1, I_2, I_3 の数値を決定する. 各リンクは同様な細い一様な棒であり, 長さ $\frac{1}{3}L$, 重さ $\frac{1}{3}M$ なので

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} M * (\frac{1}{3}L)^2 = \frac{1}{81} ML^2 = 0.00143 \quad (19)$$

3 リンクのバネ定数はアームの剛性を表しており, アームの剛性はどのモデルにおいても不変なものである. そのため, 3 リンクのバネ定数 K_{1stiff}, K_{2stiff} は 2 リンクで導出したバネ定数と等しくなるとして

$$K_{1stiff}\alpha_1 = K_{2stiff}\alpha_2 = 0.1904 \quad (20)$$

となる. しかし, このバネ定数は実際に制御対象を正確に表しているとは言えない. よって 7 節のゲイン線図を基にモデルをある程度確からしく表しているバネ定数を決定するため, 周波数 20[rad/s] 時に 1 次の共振が発生するようなバネ定数を式 (21) のように設定する.

$$K_{1stiff}\alpha_1 = K_{2stiff}\alpha_2 = 0.145 \quad (21)$$

5 4 リンク仮想受動関節モデル

4 リンク仮想受動関節モデルを図 6 に示す.

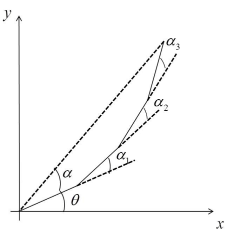

図 6 4 リンク仮想受動関節モデル

アームのたわみ角度 $\alpha(0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi)$ は

$$tan\alpha = \frac{\frac{L}{3}(sin\alpha_1 + sin\alpha_2 + sin\alpha_3)}{\frac{L}{3}(1 + cos\alpha_1 + cos\alpha_2 + cos\alpha_3)}$$
$$\alpha = tan^{-1}\frac{sin\alpha_1 + sin\alpha_2 + sin\alpha_3}{1 + cos\alpha_1 + cos\alpha_2 + cos\alpha_3} \quad (22)$$

となる.

4 リンクの状態空間表現, 慣性モーメント, バネ定数は 3 リンク時と同様な導出方法を用いる. それらを (23), (24), (25) に示す. システムの状態ベクトル x を $[\theta\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \dot{\theta}\ \dot{\alpha}_1\ \dot{\alpha}_2\ \dot{\alpha}_3]$, 制御入力を V とした状態空間表現は以下のようになる.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \theta & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dot{\theta} & \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2 & \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{1stiff}}{I_0+I_1} & 0 & 0 & -a^{(*)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a2^{(*)} & \frac{K_{2stiff}}{I_2} & 0 & a^{(*)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{1stiff}}{I_2} & -a3^{(*)} & \frac{K_{3stiff}}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{2stiff}}{I_3} & -\frac{K_{2stiff}(I_3+I_4)}{I_3 I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dot{\theta} & \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2 & \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a4^{(*)} & -a4^{(*)} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T V \quad (23)$$

$a^{(*)} = \frac{R_m B_{eq} + \eta_g \eta_m K_t K_g^2 K_m}{R_m(I_0+I_1)}$
$a2^{(*)} = \frac{K_{1stiff}(I_0+I_1+I_2)}{(I_0+I_1)I_2}$
$a3^{(*)} = \frac{K_{2stiff}(I_2+I_3)}{I_2 I_3}$
$a4^{(*)} = \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{R_m(I_0+I_1)}$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} M * (\frac{1}{4}L)^2 = \frac{1}{192} ML^2 = 0.00006029 \quad (24)$$

$$K_{1stiff}\alpha_1 = K_{2stiff}\alpha_2 = K_{3stiff}\alpha_3 = 0.1195 \quad (25)$$

6 モデル比較

単純化モデルと, 2, 3, 4 リンクのモデルを比較していく. 比較する単純化モデルは, 論文 [2] を参考にした. 状態ベクトル x を $[\theta\ \alpha\ \dot{\theta}\ \dot{\alpha}]$, 制御入力を V とした状態空間を次に示す. j_{hub} はモータ部分の慣性モーメント, j_{load} はアームの慣性モーメントである.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \theta \\ \alpha_1 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{stiff1}}{J_{hub}} & -b^{(*)} & 0 \\ 0 & -\frac{K_{stiff1}(J_{hub}+J_{load})}{(J_{hub}+J_{load})} & b^{(*)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha_1 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{J_{hub} R_m} & -\frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{J_{hub R_m}} \end{bmatrix}^T V \quad (26)$$

$b^{(*)} = \frac{R_m B_{eq} + \eta_g \eta_m K_t K_g^2 K_m}{R_m J_{hub}}$

各モデルに入力を θ が $\frac{\pi}{2}$ まで変位するようなインパルス波を加える. その時のアームのたわみ角度 α を図 7 から図 10 で示す. x 軸は時間（s）, y 軸は α(rad) である.

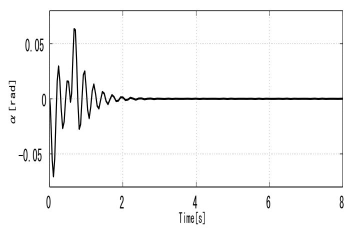

図 7　単純化モデルアームのたわみ角度

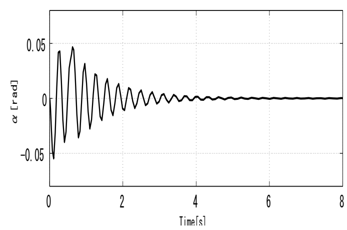

図 8　2 リンク仮想受動関節モデルアームのたわみ角度

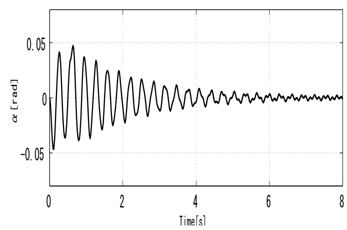

図 9　3 リンク仮想受動関節モデルアームのたわみ角度

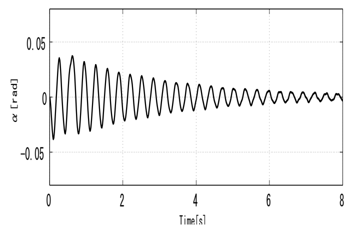

図 10　4 リンク仮想受動関節モデルアームのたわみ角度

ここでそれぞれのモデルの固有値を式 (27) から式 (30) に示す.

単純化モデルの状態 A の固有値

$$Eig = \begin{bmatrix} 0 & -2.5118 + 24.5813i & -2.5118 - 24.5813i & -9.8438 \end{bmatrix}^T \tag{27}$$

2 リンク仮想受動関節モデルの状態 A の固有値

$$Eig = \begin{bmatrix} 0 & -0.9161 + 20.4991i & -0.9161 - 20.4991i & -27.155 \end{bmatrix}^T \tag{28}$$

3 リンク仮想受動関節モデルの状態 A の固有値

$$Eig = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0858 + 51.6677i \\ -0.0858 - 51.6677i \\ -32.7333 \\ -0.5456 + 20.0056i \\ -0.5456 + 20.0056i \end{bmatrix} \tag{29}$$

4 リンク仮想受動関節モデルの状態 A の固有値

$$Eig = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0146 + 80.2570i \\ -0.0146 - 80.2570i \\ -0.0837 + 55.6473i \\ -0.0837 - 55.6473i \\ -34.4806 \\ -0.3410 + 20.0064i \\ -0.3410 - 20.0064i \end{bmatrix} \tag{30}$$

単純化モデル, 2 リンク, 3 リンク, 4 リンクのボード線図を図 11 に示す. ゲイン特性の x 軸は振動数（rad/s）, y 軸はデシベル (dB), 位相特性の x 軸は振動数（rad/s）, y 軸は角度 (deg) である.

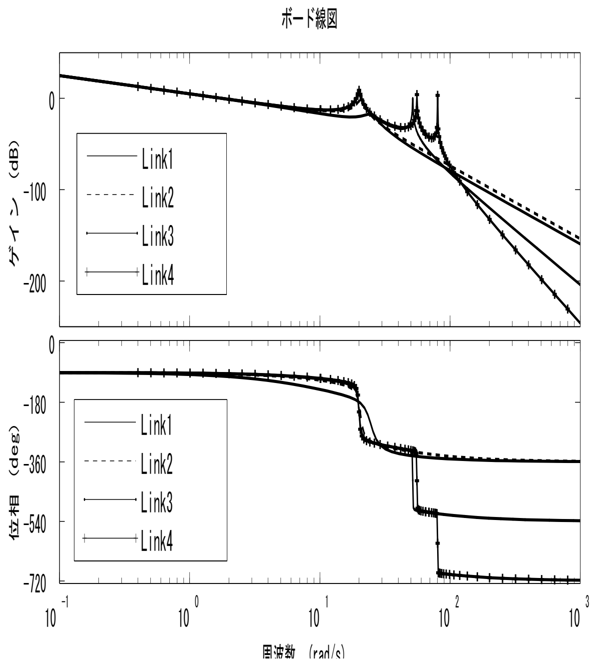

図 11　各モデルのゲイン線図の比較

7　おわりに

本研究では, フレキシブルアームのモデリングにおいて, 単純化モデルと仮想受動関節モデルの比較を行った. 図 11 より, 仮想受動関節モデルは分割数を増やす毎に共振回数も増え, 単純化モデルでは表せない高次のモデルを得ることが出来た.

参考文献

[1] 日榮祐紀. 鈴木奏:ポリトープ表現を用いたフレキシブルアームの H2 制御, 南山大学数理情報学部 2013 年度卒業論文

[2] 鈴木宏和:非線形 PID 制御によるフレキシブルアームの制振制御, 南山大学 2006 年度修士論文