利用者の短縮乗車時間合計を最大にする追い越しあり急行列車の最適停車駅配置

2010SE049 堀晃輔　2011SE240 篠田太郎

指導教員：三浦英俊

1　はじめに

鉄道の多くは, 乗車時間の短縮を目的として一部の駅に停車する急行列車を導入している. また急行列車は追い越しを行う為に一部の駅で接続追越駅を設けている. 本論文の参考にした論文 [1] は追い越しなしの場合を扱っているが, あまり実用的ではない. 実際の鉄道モデルに近づける為, 追い越しありのモデルを扱いその効果を検討する.

2　研究について

本研究は, 複数の中間駅を持ち, 追い越しのある急行列車を想定し移動時間や急行停車駅数を単純な数理モデルで表現し, 急行列車を利用することで得られる利用者の時間的便益を最大化する. そのために, 急行停車駅数, 接続追越駅数の最適化とその最適な配置も扱う.

3　鉄道路線モデル

ここでは過去の研究 [1][2] で求めらた, 追い越しなしの急行列車が存在するモデルについて述べる.

図 1 のように, 端駅から駅番号 0,1,2,...,n,n+1 が割り当てられた n 個の中間駅を持つ路線を考える. 駅の集合を $\{0,1,2,...,n,n{+}1\}$ とする. この路線に急行停車駅を設定して利用者の乗車時間が最小となるように考える.

3.1　鉄道路線モデルの仮定

1. 各駅停車の普通列車と急行列車の 2 種類が存在するものとする.
2. 急行列車は始発駅 (駅 0), 終着駅 (駅 $n+1$) に必ず停車し,1,2,...,n の n 駅のうち k 駅を選んで停車する.
3. 駅番号が大きくなる方向に移動する利用者の移動時間のみを考える.
4. 待ち時間, 乗り換え時間については扱わない.
5. 急行列車は,1 駅通過するごとに乗客一人当たり時間 t だけの短縮時間を得る.
6. 利用者は移動時間が最小となる列車の組み合わせを選ぶ.

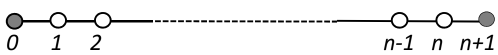

図 1　鉄道路線モデル

3.2　定式化のための文字設定

- $n\cdots$ 中間駅数
- $k\cdots$ 始発駅と終着駅を除いた急行列車が停車する駅数
- $t\cdots$1 駅通過するごとに生じる短縮乗車時間
- $S_{n,k}\cdots$ 短縮乗車時間合計
- $q_{ij}\cdots$ 駅間移動人数
- $i_0\cdots$ 始発駅
- $i_{n+1}\cdots$ 終着駅

3.3　短縮乗車時間合計について

ここでは短縮乗車時間合計を求める上で基礎となる式を示す. 短縮乗車時間を考えるのは出発駅と目的駅が急行停車駅であるため急行利用者のみに注目して短縮乗車時間が最大となる急行停車駅の配置を求める. またすべての駅間の乗客数は q 人とする.

急行の h 番目の停車駅 i_h から m 番目の停車駅 i_m への短縮乗車時間について考える.2 つの駅間は $(i_m - i_h - 1)$ 個の駅がある. このうち急行列車は $(m-h-1)$ 個の駅に停車する. よって通過駅数は $(i_m - i_h) - (m-h)$ 個となる. 駅 i_h から駅 i_m への短縮乗車時間合計は $((i_m - i_h) - (m-h))tq$ となる. 急行の h 番目の停車駅 i_h から m 番目の停車駅 i_m への短縮乗車時間合計 $S_{n,k}$ は,

$$S_{n,k} = \sum_{h=0}^{k}\sum_{m=h+1}^{k+1}\{(i_m - i_h) - (m-h)\}tq$$

$$= \left\{(k+1)n - \frac{k^3}{6} - k^2 - \frac{5k}{6} + \sum_{h=1}^{k}\{(2h-k-1)i_h\}\right\}tq$$

この式をふまえ, 目的駅が終着駅である場合の需要が相対的に多い場合について考える. この場合の短縮乗車時間合計を $T_{n,k}$ とする. 終着駅に降りる場合を αq 人としそれ以外については q 人として計算する.

$$T_{n,k} = \sum_{h=0}^{k-1}\sum_{m=h+1}^{k}\Big\{(i_m - i_h) - (m-h)\Big\}tq + \sum_{h=0}^{k}\Big\{(i_{k+1} - i_h) - ((k+1)-h)\Big\}t\alpha q$$

$$= \left\{(-\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{3}) + (nk + n - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2})\alpha + \sum_{h=1}^{k}(2h-k-\alpha)i_h\right\}tq$$

3.4　最適な急行停車駅配置

最適な急行停車駅の割当は $i_h^*(h = 1,\ldots,k)$ となる.

$$i_h^* = \begin{cases} h & (h \le (k+\alpha)/2) \\ h+n-k & ((k+\alpha)/2 < h) \end{cases}$$

3.5　急行停車駅の最適な割当をした短縮乗車時間合計

急行停車駅の最適な割当て i_h^* を実行したときの短縮乗車時間合計を $T_{n,k}^*$ とする.

$$T_{n,k}^* = \begin{cases} (n-k)(k+\alpha-\lfloor\frac{k+\alpha}{2}\rfloor)(1+\lfloor\frac{k+\alpha}{2}\rfloor) \\ \qquad\qquad\qquad \cdots (2-k \leq \alpha < k) \\ (n-k)(\alpha k+\alpha) \\ \qquad\qquad\qquad \cdots (k \leq \alpha) \end{cases}$$

3.6　短縮乗車時間合計を最大にする急行停車駅数

短縮乗車時間合計を最大にする最適な急行停車駅数 k^* は以下のように表される.

$\alpha < n/2$ のとき

$$\begin{cases} \frac{(2n-\alpha-2)}{3} \leq k^* \leq \frac{(2n-\alpha)}{3} & \cdots \quad (k+\alpha \text{ が偶数}) \\ \frac{(2n-\alpha-3)}{3} \leq k^* \leq \frac{(2n-\alpha+1)}{3} & \cdots \quad (k+\alpha \text{ が奇数}) \end{cases}$$

$n/2 \leq \alpha$ のとき

$$\begin{cases} k^* = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1 & \cdots \quad (n \text{ が偶数}) \\ k^* = \frac{n-1}{2} & \cdots \quad (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

4　追い越しありの急行が存在する場合

接続追越駅を n 駅のうち r 駅を選んで設定する. 急行は接続追越駅でのみ追い越しが可能である. この駅の配置を変えながら短縮乗車時間合計が最大となる急行停車駅数とその配置を求める. 接続追越駅の集合を $\{c_1, c_2, .., c_r, c_{r+1}\}$ とする.

4.1　接続追越駅について

先に普通が接続追越駅に停車し, その後, 急行が接続追越駅に停車する. その後, 急行が先に出発したのち, 普通が出発する. 同じ駅に 2 種類の列車が停車することで普通の乗客は急行に乗り換えることができ, 急行の乗客は普通に乗り換えることができる (図 2).

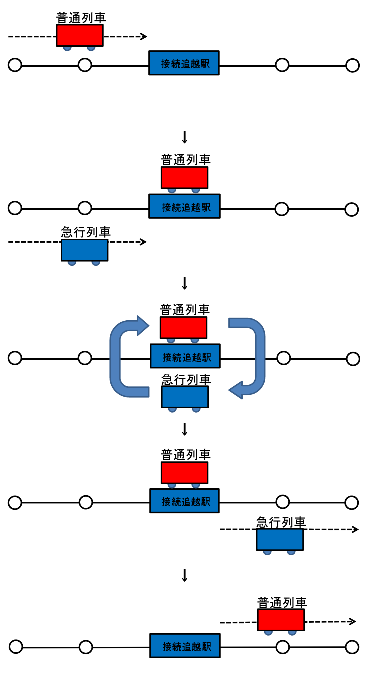

図 2　接続追越駅の仕組み

4.2　追い越しありの場合の考え方

急行は接続追越駅でのみ追い越しができる. その一方で各区間内では追い越しは発生しない. つまり各区間内では追い越しなしの時と同様に考えることができる. よって接続追越駅で路線を分割し, それぞれ計算することによって, 路線全体の短縮乗車時間合計を求めることができる. ただし接続追越駅をまたがる移動になる場合においては追い越しなしの時と考え方が異なる.

5　接続追越駅が 1 駅の場合

接続追越駅が 1 駅の場合は, 図 3 のように左の区間を第 1 区間, 右の区間を第 2 区間とする.

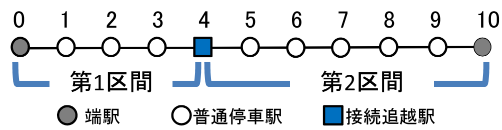

図 3　接続追越駅 (c_1=4) が 1 駅の場合の区間分け

第 1 区間では目的駅が接続追越駅 (c_1=4) と第 2 区間の中間駅, 終着駅への移動となる駅ペアを図 4 のように 1 つにまとめて考える. またここでは各駅間移動の人数を等しく 1 人 (q_{ij}=1) として考えているため α は接続追越駅, 第 2 区間の中間駅数, 終着駅の合計となる.

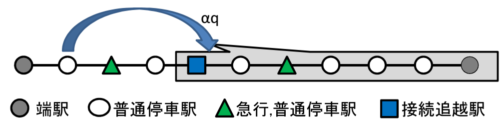

図 4　α の考え方

第 2 区間は図 5 のように路線を反転させることで第 1 区間と同様に求められる.

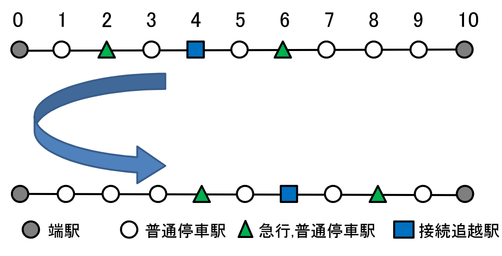

図 5　第 2 区間の考え方

5.1　接続追越駅が 1 駅の場合の短縮乗車時間

短縮乗車時間を考えるのは追い越しなしの時と同様に, 急行を利用する人のみを考える. よって乗車時間が短縮されるのは, 以下の場合が考えられる.

- 出発駅と目的駅が急行停車駅である場合.
- 出発駅が普通停車駅で, 普通に乗車し, 接続追越駅での乗り換えを経て急行に乗り換え急行停車駅で下車する場合.

- 出発駅が急行停車駅で, 急行に乗車し, 接続追越駅での乗り換えを経て普通に乗り換え普通停車駅で下車する場合.

5.2 具体例

先ほどの図 3 のような路線 (中間駅数は n=9, 接続追越駅配置は c_1=4) で最適な急行停車駅数とその配置を求める. またその短縮乗車時間合計を求める.

第 1 区間は n=3,α=7. 計算をすると最適な急行停車駅数は k^*=1 であり, その配置は i_h^*=1 となる. 短縮乗車時間合計は $T_{n,k}^*$=28.

第 2 区間は n=5,α=5. 計算をすると最適な急行停車駅数は k^*=2 であり, その配置は $i_h^*=\{1,2\}$ となる. 短縮乗車時間合計は $T_{n,k}^*$=45.

それぞれの区間の結果をふまえると以下のような結果 (表 1) となる. 最適な急行停車駅数は k^*=4 であり, その配置は $i_h^*=\{1,4,8,9\}$ となる (図 6). 全体の短縮乗車時間合計は $T_{n,k}^*$=73.

表 1 n=9,c_1=4 の時の最適な急行停車駅数と短縮乗車時間合計

	最適な急行停車駅数	短縮乗車時間合計
第 1 区間	1	28
第 2 区間	2	45
全体	4	73

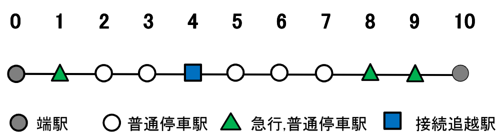

図 6 n=9,c_1=4 の時の急行停車駅の最適な配置

路線全体の短縮乗車時間合計は両区間で求めた短縮乗車時間合計を足し合わせたものになる. 最適な急行停車駅数は両区間で求めた急行停車駅数と接続追越駅を足し合わせたものになる.

同様に他の位置に接続追越駅を設置して計算する.

6 接続追越駅が 2 駅の場合

図のように左から第 1 区間, 第 2 区間, 第 3 区間とする.

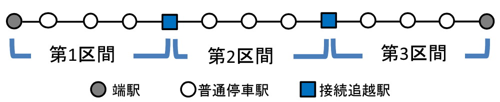

図 7 接続追越駅が 2 駅の場合のモデル (n=11,c_1=4,c_2=8)

第 1 区間と第 3 区間については接続追越駅が 1 駅の場合と同様の考え方で求められる.

6.1 第 2 区間の考え方

第 2 区間については図 8 のように考える.

1. 出発駅が第 2 区間, 目的駅が第 3 区間となる駅ペアを 1 つにまとめて α (接続追越駅 (c_2), 第 3 区間の中間駅数, 終着駅の合計駅数) とする.
2. 出発駅が第 1 区間, 目的駅が第 2 区間となる駅ペアを 1 つにまとめて β (始発駅, 第 1 区間の中間駅数, 接続追越駅 (c_1) の合計駅数) とする.
3. 出発駅が第 1 区間で目的駅が第 3 区間となる駅ペアをまとめて γ ($\alpha\times\beta$) とする.

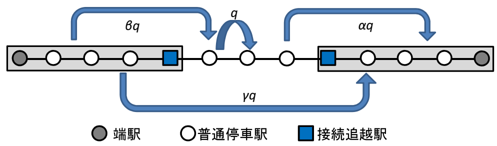

図 8 第 2 区間の考え方

これをふまえ第 2 区間の短縮乗車時間合計を $U_{n,k}$ とすると, 以下のように求めることができる.

$$
\begin{aligned}
U_{n,k} = &\Bigg\{\sum_{h=0}^{k-1}\sum_{m=h+1}^{k}\{(i_m-i_h)-(m-h)\} \\
&+\sum_{h=0}^{k}\{(i_{k+1}-i_h)-((k+1)-h)\}\,\alpha \\
&+\sum_{m=1}^{k}\{(i_m-i_0)-(m-0)\}\,(-1+\beta) \\
&+\{((n+1)-i_0)-((k+1)-0)\}(-\alpha+\gamma)\Bigg\}tq \\
= &\Bigg\{(-\frac{k^3}{6}+\frac{k}{6})+(nk-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2})\alpha \\
&+(-\frac{k^2}{2}-\frac{k}{2})\beta+(n-k)\gamma \\
&+\sum_{h=0}^{k}\{2h-k-\alpha+\beta-1\}\,i_h\Bigg\}tq \qquad (1)
\end{aligned}
$$

また第 2 区間の最適な急行停車駅数であるが, 本来ならば (1) 式を利用し短縮乗車時間合計を最大にする急行停車駅数を求める式を示したい. だが今回は急行停車駅数を第 2 区間内の中間駅数分すべて計算し, 短縮乗車時間合計が最大となる急行停車駅数を最適な急行停車駅数とする.

6.2 接続追越駅が 2 駅の場合の短縮乗車時間

短縮乗車時間を考えるのは接続追越駅が 1 駅の時に示した場合に加え, 第 1 区間の普通停車駅で, 普通に乗車し, 一つ目の接続追越駅で急行に乗り換え, 二つ目の接続追越駅で普通に乗り換え, 第 3 区間の普通停車駅で下車する場合が考えられる.

6.3 具体例

先ほどの図 7 のような路線 (中間駅数は n=11, 接続追越駅配置は c_1=4,c_2=8) で最適な急行停車駅数とその配置を求める. またその短縮乗車時間合計を求める.

第 1 区間は n=3,α=9. 計算をすると最適な急行停車駅数は k^*=1 であり, その配置は i_h^*=1 となる. 短縮乗車時間合計は $T_{n,k}^*$=36.

第 3 区間は n=3,α=9. 計算をすると最適な急行停車駅数は k^*=1 であり, その配置は i_h^*=1 となる. 短縮乗車時間合計は $T_{n,k}^*$=36.

第 2 区間は n=3,α=5,β=5,γ=25. 表 2 より短縮乗車時間合計が最大となる k^*=0 が最適な急行停車駅数となる (短縮乗車時間合計は $U_{n,k}^*$=75).

表 2 n=11,c_1=4,c_1=8 の時の第 2 区間の各急行停車駅数における短縮乗車時間合計と最適な急行停車駅配置

急行停車駅数	最適な配置	短縮乗車時間合計
$k=0$		$U_{n,k}=75$
$k=1$	$i_h^*=1$	$U_{n,k}=60$
$k=2$	$i_h^*=1,3$	$U_{n,k}=36$
$k=3$	$i_h^*=1,2,3$	$U_{n,k}=0$

表 3 n=11,c_1=4,c_1=8 の時の最適な急行停車駅数と短縮乗車時間合計

	最適な急行停車駅数	短縮乗車時間合計
第 1 区間	1	36
第 2 区間	0	75
第 3 区間	1	36
全体	4	147

最適な急行停車駅の配置は図 9 のようになる.

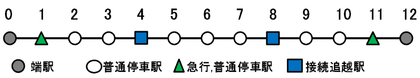

図 9 n=11,c_1=4,c_2=8 の時の急行停車駅の最適な配置

n=11,c_1=4,c_2=8 の時の最適な急行停車駅の配置は接続追越駅以外は始発駅, 終着駅に寄せる形となる.

7 追い越しなしと接続追越駅を配置した場合の比較

7.1 最適な急行停車駅数とその配置の比較

ここでは最適な急行停車駅数とその配置の比較を行う.

表 4 最適な急行停車駅数の比較 ($n = 7, ..., 16$)

中間駅数	追い越しなし	接続追越駅 (1 駅)	接続追越駅 (2 駅)
7	4	3	2,3
8	4,5	3,4	3
9	5,6	4	3,4
10	6	4,5	4
11	6,7	5	4
12	7,8	5,6	4,5
13	8	6	5
14	8,9	6,7	5,6
15	9,10	7	6
16	10	7,8	6

追い越しなしの急行停車駅数が中間駅数のおよそ 3 分の 2 に対し, 接続追越駅が 1 駅の場合はおよそ半分となる. 接続追越駅が 2 駅の場合はおよそ 3 分の 1 となる. また急行停車駅の最適な配置は, 図 10($n = 13$) のように, 接続追越駅以外は始発駅と終着駅に寄せる形になり追い越しなしの時と似たような形となった.

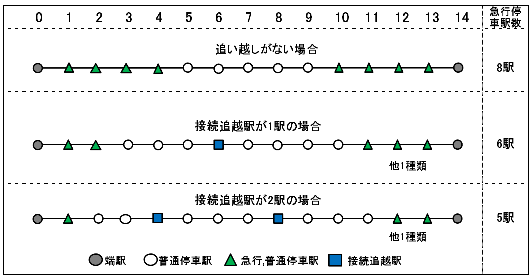

図 10 n=13 の時の最適な急行停車駅な配置の比較

7.2 最大となる短縮乗車時間合計の比較

接続追越駅 1 駅の場合の短縮乗車時間合計は追い越しなしの約 1.5 倍から 1.6 倍と考えられる. また接続追越駅が 2 駅の場合は約 1.9 倍と考えられる (図 11).

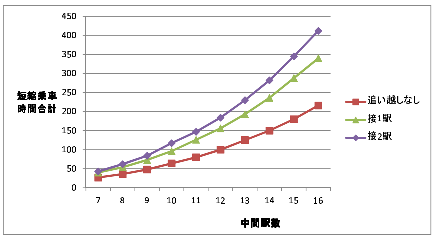

図 11 最大となる短縮乗車時間合計の比較 ($n = 7, ..., 16$)

7.3 総括

追い越しなしの最適な急行停車駅数は接続追越駅の配置によって急行停車駅を大幅に減らす事ができる. また追い越しなしの場合は, 急行による短縮が一部利用者に限られていた. しかし, 接続追越駅が配置されれば多くの乗客が時間短縮の効果を受けることができる. これは短縮乗車時間合計の効果が追い越しなしの時よりも得られたことと大きく関係しているだろう.

8 今後の課題

今後は接続追越駅を配置せずに急行列車が普通列車を追い越す場合や, さらに普通列車, 急行列車以外の列車が存在する複雑なモデルを考え, その中でも追い越しの有無や接続追越駅の有無などを考え, 短縮乗車時間合計と最適な急行停車駅の配置を考える. またこれらの計算結果を元に実際の路線に応用していけるようにする.

参考文献

[1] 武藤克徳, 渡辺涼太 (2014), 利用者の旅行時間を最小にする急行列車停車駅の割り当ての最適化, 南山大学情報理工学部情報システム数理学科卒業論文.

[2] H. Miura, T. Nemoto (2014), A Mathematical Railway Model for Allocation of Limited-Stop Service Stations to Minimize Total Travel Time, the 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies, Barcelona, Spain.

[3] 第 11 回大都市交通センサス調査結果集計表 (2011)