Control Moment Gyroscope のスライディングモードサーボ制御

2011SE003 相羽祐生

指導教員：高見勲

1　はじめに

Control Moment Gyroscope(以下, CMG) は, 大型の宇宙機の姿勢制御装置として研究が行われており, また 実際に CMG は複数個を協調動作させて用いられる．本研究では, 基礎研究の段階として, 単一の CMG に対するアプローチを行う．本研究の制御目的として, スライディングモード制御理論に基づいたサーボ制御則を適用することにより, 駆動源を持たない Gimbal4 の角度追従制御を行う．また, $Hamilton$ 系を用いて CMG のシステムを表現し, 部分安定化問題の枠組みを用いて制御系設計を行い, [1] 設計したコントローラの有用性を, シミュレーション, 実験を行うことにより検証する．

2　モデリング及び状態方程式の導出

図 1 は CMG の概略図である．CMG には Rotor1 を回転させる Motor1 のトルク $T_1(t)$ と Gimbal2 を傾ける Motor2 のトルク $T_2(t)$ が存在する．Rotor1 の角度と角速度を $q_1(t)$, $\omega_1(t)$ Gimbal2 の角度と角速度を $q_2(t)$, $\omega_2(t)$ Gimbal4 の角度と角速度を $q_4(t)$, $\omega_4(t)$ と定義する．CMG の運動方程式を導出する為, $Lagrangian$ L を求めると,

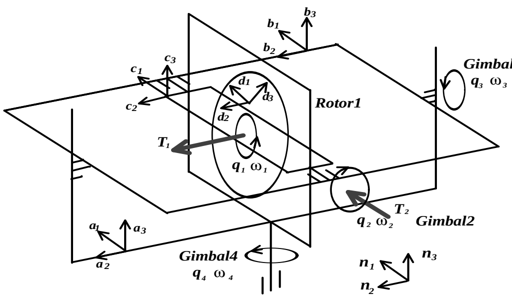

図 1 Schematic model of CMG

$$L = \frac{1}{2}\left\{J_D\omega_1^2 + (I_C + I_D)\omega_2^2 + (J_2 - J_1\cos^2 q_2)\omega_4^2\right\} + J_D\omega_1\omega_4\sin q_2 \quad (1)$$

となり, $Euler - Lagrange$ の運動方程式は以下の式で与えられる．

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = T_i(i = 1, 2, 4) \quad (2)$$

I_D, J_D : Rotor1 の慣性モーメント [kg・m^2]

I_C, J_C, K_C : Gimbal2 の慣性モーメント [kg・m^2]

K_B : Gimbal3 の慣性モーメント [kg・m^2]

K_A : Gimbal4 の慣性モーメント [kg・m^2]

$J_1 = J_C + J_D - K_C - I_D, J_2 = K_A + K_B + J_C + J_D$

次に, 一般化座標 $q = [q_1q_2q_4]^T$ に対応する共役運動量 p と角速度 $\dot{q}$ は, それぞれ式 (3), (4) のように得られる．

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_4 \end{bmatrix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} J_D(\omega_1 + \omega_4\sin q_2) \\ (I_C + I_D)\omega_2 \\ (J_2 - J_1\cos^2 q_2)\omega_4 + J_D\omega_1\sin q_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin q_2 J_D p_4 + p_1 J_1\cos^2 q_2 - p_1 J_2}{J_D((J_1\cos^2 q_2) - J_2 + J_D - J_D\cos^2 q_2)} \\ \frac{p_2}{(I_C + I_D)} \\ \frac{-p_4 + p_1\sin q_2}{J_1\cos^2 q_2 - J_2 + J_D - J_D\cos^2 q_2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

また, $Hamiltonian$ は $H = p^T\dot{q} - L$ であり, 正準方程式は次のように得られる．

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + T \quad (5)$$

得られた正準方程式 (5) を用いてシステムを表現すると, 式 (6) が得られる．

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_2}{(I_C + I_D)} \\ \frac{-p_4 + p_1\sin q_2}{J_1\cos^2 q_2 - J_2 + J_D - J_D\cos^2 q_2} \\ 0 \\ f_5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f_5 &= \cos q_2\frac{f_{51}}{f_{52}} \\ f_{51} &= -\sin q_2\big((J_4 - K_C)p_4^2 + J_3p_1^2\big) + \\ &\quad \big(J_3 + J_4 - K_C + (K_C - J_4)\cos^2 q_2\big)p_1p_4 \\ f_{52} &= \big(\cos^2 q_2(K_C - J_4) - J_2 + J_D\big)^2 \\ J_3 &= K_A + K_B + K_C + K_D \\ J_4 &= -J_C + K_B + K_C + K_D \end{aligned}$$

ここで, $\dot{p_4} = 0$ より, p_4 は保存量となり, 何らかの一定の値を持つステップ外乱信号と見なせるが, [1] 本研究では Gimbal4 が初期状態において静止している場合を考える為, $p_4 = 0$ として扱い, またモデル設計では p_4 の影響を無視する形で扱う．よって, システムを表す状態方程式は,

状態変数を $x(t) = [q_2 q_4 p_1 p_2]^T$ として，式 (7) のように得られる．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{p_2}{(I_C+I_D)} \\ \frac{-p_4+p_1 \sin q_2}{J_1 \cos^2 q_2 - J_2 + J_D - J_D \cos^2 q_2} \\ 0 \\ f_5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \qquad (7)$$

3　スライディングモードサーボ系の設計

3.1　拡大系

本研究では角度追従制御を行う為，式 (7) の拡大サーボ系を考える．式 (7) を平衡点 $x_e = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ において線形近似して導かれる係数行列と，目標値 r と 出力との差の積分値 z を用いた拡大系サーボ系を構成すると式 (8) のようになる．また，式 (8) の各係数行列を (9) のようにおく．

$$z = \int_0^t (r - Cx(\tau)) d\tau$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ -C & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} O \\ r \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_C+I_D} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_D-J_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r = [\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{3}]^T$$

$$A_e = \begin{bmatrix} A & O \\ -C & O \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix}, Q_e = \begin{bmatrix} O \\ r \end{bmatrix} \qquad (9)$$

3.2　切換超平面の設計

$\hat{x} = [xz]^T$ として，切換関数を式 (10) のように定義する．

$$\sigma(\hat{x}) = S\hat{x} \qquad (10)$$

式 (10) の挙動はシステムの伝達関数 $S(sI - A_e)^{-1} B_e$ の零点に支配される．安定かつ過渡特性の良いスライディングモードを実現する為に，次の任意の $Q > 0$ に対する *Riccati* 方程式 (11) により得られる正定対称解 P を用いて S を求める.[2] ただし，$\epsilon \geq 0$ は $A_\epsilon = A + \epsilon I$ のように設定することで，システムの零点に安定余裕を与える為の正の設計パラメータである．

$$\begin{cases} PA_\epsilon + A_\epsilon^T P - PB_e B_e^T P + Q = 0 \\ S = B_e^T P \end{cases} \qquad (11)$$

3.3　最終スライディングモードコントローラの設計

最終スライディングモード制御入力は，線形制御入力項 u_l と非線形制御入力項 u_{nl} から構成され，式 (12) と表せる．ただし，K は非線形入力 u_{nl} の大きさを調節するパラメータであり，$\delta > 0$ は非線形入力 u_{nl} の切換によって起こるチャタリングの低減を目的とした平滑化を行う為の正のパラメータである．

$$\begin{aligned} u &= u_l + u_{nl} \\ &= -(SB_e)^{-1} \big((SA_e x + SQ_e) + K \frac{\sigma}{\| \sigma \| + \delta} \big) \end{aligned} \qquad (12)$$

3.4　可到達条件

求めた制御入力が切換超平面上に到達し，拘束されるかを確認する．$\sigma \to 0$ を実現する為，σ に対するリアプノフ関数の候補を (13) のように選び，(13) の時間微分と式 (12) を用いて計算すると，(14) の関係が得られ，σ のダイナミクスが漸近安定となり，切換超平面上に拘束されることが確認される．

$$V = \frac{\sigma^T \sigma}{2} \qquad (13)$$

$$\dot{V} = -(SB_e) K \frac{\sigma^2}{\| \sigma \| + \delta} \prec 0 \quad (SB_e \succ 0, K \succ 0) \qquad (14)$$

4　シミュレーション及び実験結果との比較

設計した制御系を用いて，MATLAB によるシミュレーションを行い，CMG の実験機に対し実験を行った結果と比較を行う．目標値及び初期値は次のように設定した．

$$r = [q_{2r} \quad q_{4r}]^T = [\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{3}]^T, x_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \qquad (15)$$

Gimbal2，Gimbal4 それぞれの応答結果は，シミュレーションより実験の方が応答が速いが，Gimbal2 の角度 q_2，Gimbal4 の角度 q_4 それぞれが目標値にほぼ偏差なく追従している為，本研究の制御目的は達成されたと言える．

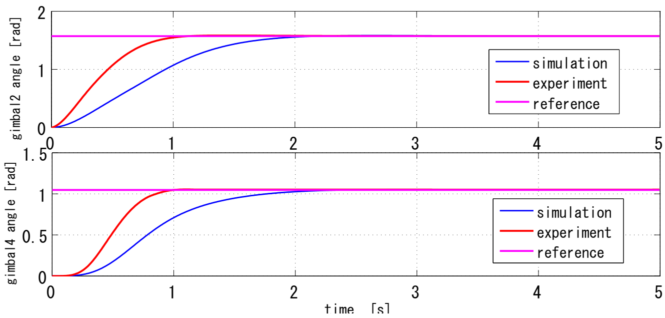

図 2　Comparison of simulations and experiments

5　終わりに

駆動源のない Gimbal4 を目標角度に追従させる課題に対し，[1] の手法を用いて，CMG のシステムを可制御の形で表現し，スライディングモード制御理論に基づいた追従コントローラを提案して，設計したコントローラの有用性をシミュレーション，実験により検証した．

参考文献

[1] K. Ishikawa and N. Sakamoto and D. Shiraki: *Design of partial optimal control for a nonlinear system and application to the attitude control of a control moment gyro.* SICE Annual Conference , 1865/1871 (2013).

[2] Y. F. Chen and T. Mita: *Adaptive Robust Sliding Mode Control.* T. IEE Japan, Vol. 113-C, No.3, 203/210 (1993).