

等角写像による折り畳み構造物の研究と作製

2011SE011 朝比奈 友哉

指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

折り紙を基とした折り畳み性能を持つ構造物を工学的分野へ適用する際、角度の設計は非常に重要である。しかし、それには手間と時間がかかるものであった。そこで、機能性を維持しつつ新規でかつ精緻な折り畳み構造物を生み出す手法として、変換の前後で任意の2曲線がなす角度が保存されるという特性を持つ等角写像変換を使用する。そうすることにより様々な展開図を誰でもシステムティックに得ることができれば、折紙の機能性を活用した構造物を容易に作成することができるようになる。本稿では、折り畳み可能な円筒折紙展開図を基とし変換によって円錐殻構造物展開図を得ることを目標とする。

2 折り畳み条件

折り畳み条件は節点折り畳み条件、構造折り畳み条件がある。

2.1 節点の折り畳み条件

すべての節点で折り畳み可能である展開図を節点折り畳み可能な展開図という。折り畳み可能性は各節点とその節点に集まる山折り谷おりの配置のみにかかる局所的な条件である。折り畳み構造内部の節点が折り畳み可能であるためには川崎定理の条件、その展開図においてそれぞれの交点の周りにあるすべての角を左回りにとった数列 a_1, \dots, a_{2n} が条件 $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \pi$ を満たせばよい。

2.2 構造折り畳み条件

構造折り畳み条件は折り紙構造物の構造に密接に関係する。円筒構造物の展開図は山線で囲まれた合同な平行四辺形を単位として構成されている。ここで、 n は周方向の単位平行四辺形の数である。これらの折り紙構造物においては、明らかに各節点は節点折り畳み条件を満たす。さらに、図の角 α が $n\alpha = \pi$ と各節点が節点折り畳み条件を満たせば、構造は折り畳み可能である [1]。

3 指数関数変換による円錐状構造物の構成

円筒状構造物の展開図を z 平面におき、 $w = e^z$ で w 平面に移す。これは等角写像なので元の展開図の角度が保存される。 w 平面上の展開図の像で、折線の像をすべて直線で置き換えると、円錐状折り紙構造物の展開図となる。節点折り畳み条件は辺の像を直線で置き換えた誤差を除いて保たれる。構造折り畳み可能性については不明であるが、これで円錐折り紙構造物を作製すると、多少誤差があるが、ほぼ平面に折り畳める。

4 指数関数変換法の補正

等角写像では精密な平面折り畳みは実現できない。だが、合同な四角形を並べて層を形成し、それと相似な層を重ねていく構造がヒントとして得られる。そのような構造において精密に平面に折り畳める条件を考える。

5 節点の折り畳み条件

まず平行四辺形格子の指数関数変換によって得られる展開図による折り紙構造物の幾何学的性質を図で説明する。

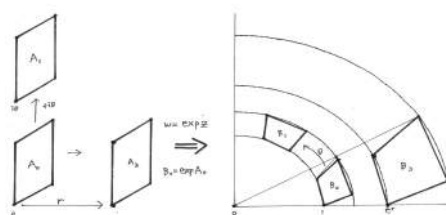


図 1

A_1 : 虚軸方向に θ 平行移動

A_2 : 実軸方向に r 平行移動

$w = \exp z$ で等角写像変換すると

$B_1 = \exp A_1$ は B_0 を原点周りに θ 回転した合同図形

$B_2 = \exp A_2$ は B_0 を原点中心に e^r 倍相似変換した相似図形

A_3 : 直線 $x = l/2$ で A_0 と線対称

$w = \exp z$ で等角写像変換すると

$B_3 = \exp A_3$ は直線 $\arg w = \alpha + \beta/2$ で B_0 と線対称な合同図形

平行四辺形格子を指数関数変換した展開図は、単位平行四辺形を指数関数変換した四角形で構成されるが、それらは層ごとに合同であり、別層間では相似となる。

6 構造物の閉じる条件

1 節点 6 折り線モデルのうち、山折り線に囲まれた最小の平行四辺形を 1 単位要素とした円筒状展開図に対して、変換後の閉じる条件を検証する。

変換後の展開図を図 4 に示す。

変換後の閉じる条件は

$$\cdot \text{内側の多角形の条件: } N(2\alpha' - h) = 2\pi$$

$$\cdot \text{外側の多角形の条件: } N(2\alpha + h) = 2\pi$$

構造物が円筒の場合は $\alpha = \alpha'$ となり満たすので両者は

同時に満たされるが，構造物が円錐の場合は $\alpha \neq \alpha'$ なので上記 2 式を満たす必要がある．だが， $\alpha' = \alpha + h$ を示すことができれば外側の多角形の条件のみを満たせばよくなる．

よって， $\alpha' = \alpha + h$ を示す．

(命題) $OA=OC$, $OB=OD$, $\angle ACD=\angle BOD=h$ のとき， $\alpha=\angle CDA$, $\alpha'=\angle DAB$ について $\alpha'=\alpha+h$ が成立する．

(証明) $\angle AOB=\angle COD=\angle AOD-h$ と $OA=OC$, $OB=OD$ より $\triangle AOB \cong \triangle COD$. ゆえに $\angle ABO=\angle CDO=\beta$. OB と AD の交点を E とする. $\angle BED$ は $\triangle BEA$ の外角ゆえに, $\angle BED = \beta + \alpha'$ また $\triangle BED$ は $\triangle DEO$ の外角ゆえ $\angle BED=\alpha + \beta + h$ $\angle BED = \beta + \alpha'$, $\angle BED=\alpha + \beta + h$ の 2 式より, $\beta + \alpha' = \alpha + \beta + h$. ゆえに $\alpha' = \alpha + h$.

よって，構造物の折り畳み条件について次の定理が示された．

(定理) 構造物が構造折り畳み可能であるための必要十分条件は

$$N(2\alpha + h) = 2\pi \quad (1)$$

である．

7 構造物の作製

以上の設計法で完全に平面に折り畳める円錐殻折紙構造物を作製した． $\theta=\pi/3$, $n=4$, $h=\pi/12$, 折り畳み条件を満たす α を構造折り畳み条件である非線形方程式 $N(2\alpha + h) = 2\pi$ を解いて求めると $\alpha = 5\pi/24$ となった．層の数 $m=2$ とした．これで内節点の節点折り畳み条件が確認できた．

まず円錐殻の状態の写真を図 4 に示す．

図 5 はそれを折り畳んだ状態である．

8 おわりに

今回研究した円錐殻折紙構造物は剛体折りの構造物でない．なので，畳まれた状態から伸びた状態になるには単位三角形が変形する必要がある．すなわち，畳まれた状態を伸びた状態にするにはエネルギーが必要である．逆に伸びた状態から畳まれた状態にするのにもエネルギーが必要である．だからこの構造物には少なくとも 2 つの安定状態（伸びた状態と畳まれた状態）を持つ構造物である．これは，利点となる可能性がある．しかし，スムーズな変形が要求されるような応用では欠点となる．

参考文献

- [1] 『等角写像とその円錐殻折紙構造物設計への応用』石田祥子, 野島武敏, 亀井岳行, 萩原一郎, 日本応用数理学会論文誌, vol.22, No.4, pp.301-318(2012)

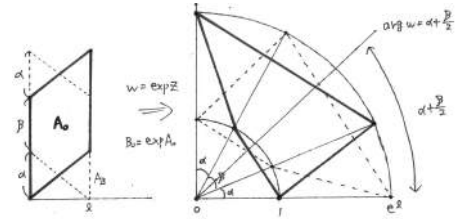


図 2

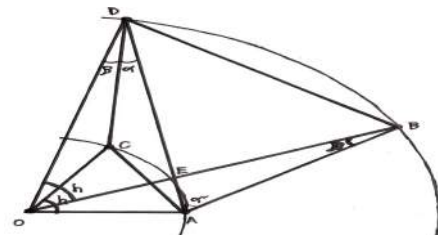


図 3



図 4 円錐殻の状態



図 5 折り畳んだ状態