

回転型倒立振子のモデル化と制御

2011SE022 後藤大志

指導教員：大石泰章

1 はじめに

回転型倒立振子は不安定な制御対象であり、安定化の様子を視覚的に実感できる上、様々な制御理論の検証、学習を行うことが可能である。川田による文献 [1] は、MATLAB/Simulink を用いて制御器のモデリングから実機検証までの流れを具体的に解説した書籍である。この書籍は、LEGO MINDSTORMS NXT から回転型倒立振子を製作し、実機実験までの一連の流れを行いながら読み進められるようになっている。

本研究では、教育版 LEGO MINDSTORMS NXT を用い回転型倒立振子を製作し、未知パラメータの同定、モデル化、そしてシミュレーション、実機実験を行う。

2 制御対象

LEGO MINDSTORMS NXT を用いて製作した回転型倒立振子を図 1(左) に示す。回転型倒立振子はモータ軸に取り付けられたアームを水平方向に回転させることにより、アームの先端に取り付けられた振子を運動させる。アームの基部と振子の基部に取り付けられた 2 つのセンサによりアームの角度と振子の角度を検出し、その値を基に適切なモータの電圧を計算する。この電圧をモータに加え、振子を倒立させるように制御を行う。

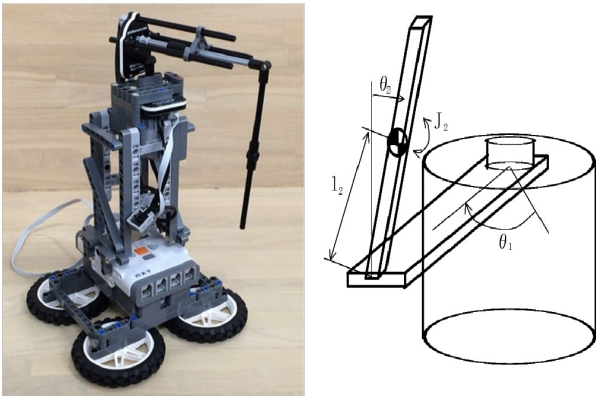


図 1 回転型倒立振子 (左) と概要図 (右)

3 モデル化

図 1(右) は回転型倒立振子の概略図である。これに基づき数式モデルを導出する。また、回転型倒立振子の物理パラメータは表 1 のように定義する。並進運動の運動エネルギーと回転運動の運動エネルギーの総和で構成されるシステム全体の運動エネルギー T 、振子の位置エネルギー U に基づいて、ラグランジュ関数 L は

$$L = T - U \quad (1)$$

表 1 回転型倒立振子の物理パラメータ

名称	記号	値
アームの軸から先端までの長さ	L_1	$11.6 \times 10^{-2}[\text{m}]$
振子の質量	m_2	$3.95 \times 10^{-2}[\text{kg}]$
振子の軸から重心までの長さ	l_2	$7.3 \times 10^{-2}[\text{m}]$
重力加速度	g	$9.81[\text{m/s}^2]$
振子の重心周りの慣性モーメント	J_2	未知
振子の粘性摩擦係数	c_2	未知
アームや振子の特性により決まる定数	a	未知
	a_{sgn}	未知
	b	未知

と定められる。また、散逸エネルギーを D とかく。このとき、 θ_2 についてのラグランジュの運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t)}{\partial \dot{\theta}_2(t)} \right) - \frac{\partial L(t)}{\partial \theta_2(t)} + \frac{\partial D(t)}{\partial \dot{\theta}_2(t)} \\ = I_2 \dot{\theta}_1(t)^2 \sin \theta_2(t) \cos \theta_2(t) \\ + m_2 g l_2 \sin \theta_2(t) - c_2 \dot{\theta}_2(t) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

となり、振子の数式モデルが得られる。但し、 $I_2 = J_2 + m_2 l_2^2$ である。アームの数学モデルはモータ駆動系の特性と動摩擦の影響を考慮し近似的に

$$\ddot{\theta}_1(t) = -a \dot{\theta}_1(t) - a_{\text{sgn}} \text{sgn} \dot{\theta}_1(t) + b v(t) \quad (3)$$

とする。但し、パラメータ a , a_{sgn} , b , c_2 , J_2 は未知であり、次章でこれらを決定する。

これらの式を使い、 θ_1 , θ_2 は十分零に近いとして線形化を行う。さらに $x(t) = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$ と状態変数を選び、数学モデルを

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

という状態空間表現で表すことができる。但し、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & \frac{m_2 g l_2}{I_2} & \frac{m_2 L_1 l_2 a}{I_2} & -\frac{c_2}{I_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ -\frac{m_2 L_1 l_2 b}{I_2} \end{pmatrix}$$

である。

4 パラメータ同定

本研究で使う回転型倒立振子にはアームやモータの特性によって値が決まる未知パラメータが存在する。この未知パラメータの値を決定するため、文献 [1] を参考に同定実験を行う。アームの角度 θ_1 を $0[\text{deg}]$ から $45[\text{deg}]$ まで動かすような制御入力 $v(t)$ を与え、アームを初期位置から適

当な目標値を定め動かす。ここからアームの角速度と角加速度を算出し、これらの値を元に未知パラメータ a , a_{sgn} , b を導出する。ここまではアームにおいてのパラメータ同定である。また振子についてもパラメータ同定を行う。振子が真下に吊り下がっているときを $\theta_2 = 0[\text{deg}]$ として、ここから $-50[\text{deg}]$ まで振子を持ち上げ、自由振動させたときの振子角度を測定する。ここから振子の角度と角速度を算出し、これらの値を元に未知パラメータ c_2 , J_2 を導出する。得られたパラメータを使ったシミュレーションと実機実験との比較を図 2, 図 3 に示す。両者はよく一致しており、得られたパラメータが信頼できることがわかる。

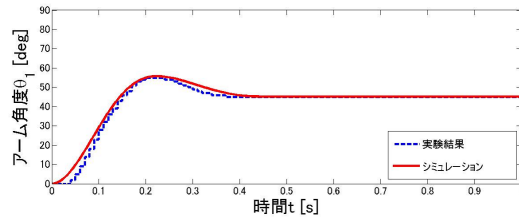


図 2 シミュレーションと実機実験におけるアーム角 θ_1

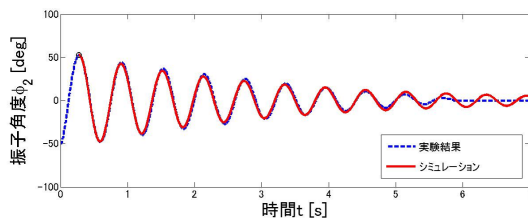


図 3 シミュレーションと実機実験における振り子角 θ_2

5 制御機設計

パラメータの誤差を考慮し、ロバスト性を確保するため、LMI を用いて最適レギュレータを設計する。本研究では長さや質量が異なる複数の振り子も使うものとしてロバスト性を持つ制御器を文献 [2], [3] を参考に設計する。振り子の長さや質量の範囲は以下のように示される：

$$l_2 \in [l_{2\min}, l_{2\max}] = [0.065, 0.213], \quad (4)$$

$$m_2 \in [m_{2\min}, m_{2\max}] = [0.00104, 0.00342]. \quad (5)$$

最適レギュレータにおける重み関数 Q , R を以下のように設定する：

$$Q = \text{diag}[80, 7000, 0.01, 0.01], \quad (6)$$

$$R = 1. \quad (7)$$

この時、状態フィードバックゲインは

$$K = [8.7086 \quad 327.51 \quad 11.123 \quad 24.995] \quad (8)$$

のように得られる。ゲイン K を用いてシミュレーションを行う。振り子の角度を真上を基準として $10[\text{deg}]$ 傾けた状

態から真上に収束させることを目標とする。図 4 は振り子の長さや質量を最大に設定し、MATLAB/Simulink を用いてシミュレーションを行った結果である。実線で表される振り子角度が最終的に 0 に収束していることがわかる。

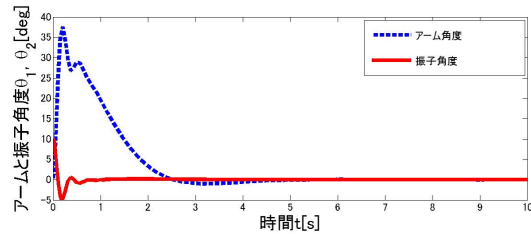


図 4 シミュレーション結果

次に実機実験を行う。振り子長と質量は最大とする。まず、シミュレーションと同様に振り子の角度を真上を基準として約 $10[\text{deg}]$ 傾けた状態から制御を行った。その結果を図 5, 6 に示す。結果として振り子を真上に倒立させることに成功した。

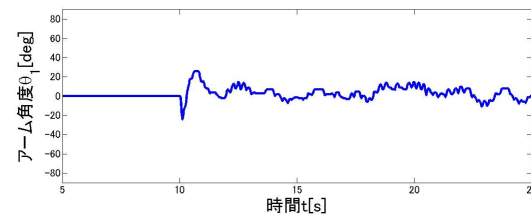


図 5 実機実験の結果 (アーム)

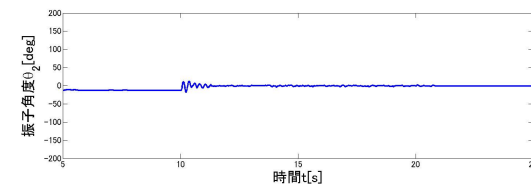


図 6 実機実験の結果 (振り子)

6 おわりに

本研究では、回転型倒立振り子のアームと振り子のモデル化、パラメータ同定、シミュレーション、実機実験までを行った。今回実験を行った振り子の長さや質量の場合、振り子を真上に安定させることに成功した。しかし、一番短い振り子の場合のみ真上で安定させることに失敗してしまった。原因として摩擦やアクチュエータのむだ時間等の影響があったのではないと思われる。この点を考慮することを今後の課題とする。

参考文献

- [1] 川田昌克：『MATLAB/Simulink と実機で学ぶ制御工学』。Techshare, 東京, 2013.
- [2] 川田昌克：『MATLAB/Simulink による現代制御入門』。森北出版, 東京, 2011.
- [3] 蛭原義雄：『LMI によるシステム制御 ロバスト制御系設計のための体系的アプローチ』。森北出版, 東京, 2012.