ルービックキューブ 6 面完成法の数理的考察

2011SE067 飯塚　省太

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

ルービックキューブはハンガリーの建築学者, エルノー・ルービックによって考案され世界中で知られている知名度の高いパズルである（[4]）．このパズルの解法は数多く存在する．本研究は，それらの解法の中でも比較的理解しやすい [3] で紹介されている方法をとりあげて，その正当性を示す．その方法は 7 つの step(step1〜step7) から成るが，本研究ではそのうちの step4〜step7 を対象とする．

卒業論文では，step4〜step7 の 4 つの step の正当性を示したが，本稿ではそのうちの step7 の正当性だけを示す．

以下の 2 節では，本稿で用いる用語を説明する．3 節では，step7 とその正当性について説明する．

2　用いる用語

この節では，本稿で用いる用語を説明する．

定義 2.1(面の名称)　ルービックキューブを水平な面においたとき，その前面を F 面，左面を L 面，後面を B 面，右面を R 面，上面を U 面，下面を D 面と呼ぶ．

定義 2.2(ブロック)　ルービックキューブは 26 の立方体でできており，この各立方体をブロックという．ブロックの各面をブロック面といい，1 つの面が現れるブロックを 1 面体という．同様に，2 つの面が現れるブロックを 2 面体といい，3 つの面が現れるブロックを 3 面体という (図 1 参照)．

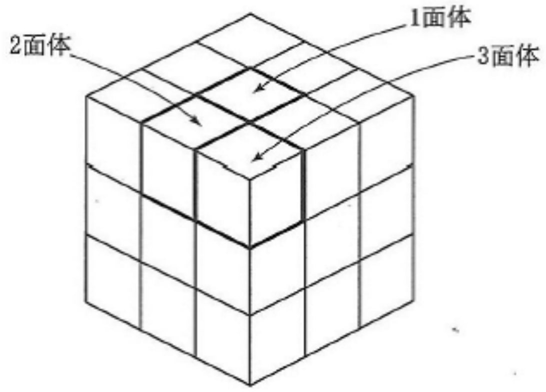

図 1　ブロックの種類 ([1])

以後，混乱のないときはルービックキューブのことを単にキューブと呼ぶ．

定義 2.3(単位操作)　キューブの各面を時計回りに 90˚ 回転させる操作を単位操作という．これらの単位操作は，回転させる面と同じ記号で表す．すなわち，単位操作は U，D，F，B，L，R の 6 つである．

また，キューブの前面を反時計回りに 90˚回転させる操作を F^{-1} とする．B^{-1} なども同様である．

さらに，単位操作 F に続いて単位操作 R を行う操作を FR とする．FU，F^{-1}UB なども同様である．

定義 2.4(キューブの置きかえ)　水平に置かれたキューブをもちあげ，単位操作をせずに全体を回転させてもとの水平な面におく操作を「置きかえ」という．本稿では，U 面と D 面の 1 面体の色が不変の置きかえだけを対象とする．

3　Step7 とその正当性

この節では，step7，すなわち，次の条件 6 を満たす形から, 完成形を作る手順とその正当性を示す．

条件 6: 下から 2 段の 17 ブロックと U 面に現れる 4 つの 3 面体が完成し，さらに U 面の色が揃っている．

まず，step7 を示す．そのために，step7 の基本手順 (基本手順 7) とキューブの 2 面体配置を定義する．step7 は，基本手順 7 とキューブの置きかえによって定義される．

定義 7.1(基本手順 7)　操作

$$\mathrm{R}^2\ \mathrm{U}\ \mathrm{F}\ \mathrm{B}^{-1}\ \mathrm{R}^2\ \mathrm{F}^{-1}\ \mathrm{B}\ \mathrm{U}\ \mathrm{R}^2$$

を基本手順 7 という (R^2 は RR の略である)．

定義 7.2(キューブの 2 面体配置)　キューブが条件 6 を満たすとする．このとき，キューブの 2 面体配置を

L 面に現れる 2 面体 a,
B 面に現れる 2 面体 b,
R 面に現れる 2 面体 c,
F 面に現れる 2 面体 d,

を用いて (a, b, c, d) と表す．

定義 7.3(Step7)　Step7 は，次の 2 つからなる．

step7-1. U 面に現れる 4 つの 2 面体がどれも完成の位置にないとき，基本手順 7 を 1 回行う．

step7-2. U 面に現れる 2 面体のうち少なくとも 1 つが完成の位置にあるとき，完成の位置にある 2 面体が L 面にくるよう，キューブを置きかえ，基本手順 7 を完成形が得られるまで繰り返す．

次に，上の手順の正当性，すなわち次の定理を証明する．

定理 7.4(Step7 の正当性)　条件 6 を満たすキューブが

解けるのであれば，そのキューブに step7 を行うと，有限回で終了し，完成形を得る．より具体的には，以下が成り立つ．
(1)step7-1 により，条件 6 を保存したまま U 面の 4 つの 2 面体のうち少なくとも 1 つが完成の位置にくる．
(2)step7-2 は，基本手順 7 を高々 2 回繰り返すことで終了し，終了したときは完成形を得る．

定理 7.4 を示すには，次の 3 つの補助定理が必要である．

補助定理 7.5(基本手順 7 の性質)
(1) 基本手順 7 は条件 6 を保存する．
(2) 基本手順 7 により，キューブの 2 面体配置は

$$(a,b,c,d) \text{ から } (a,d,b,c)$$

に変わる．
証明．実際に基本手順 7 を行えば確認できる．

補助定理 7.6　条件 6 を満たすキューブが解けるのであれば，置換

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

は偶置換である．ただし，$(1,2,3,4)$ はそのキューブの置き方における完成形の 2 面体配置，(a,b,c,d) は，そのキューブの 2 面体配置 ($\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$) である．
証明．[2] の第 2 基本定理から導くことができる．

補助定理 7.7　$\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$ のとき，次の 2 条件は同値である．
(1)$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & 4 \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$ が偶置換である．
(2)$(a,b,c) \in \{\ (3,1,2), (2,3,1), (1,2,3)\}$
証明．$\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$ より，(a,b,c) は，$(1,2,3)$，$(1,3,2)$，$(2,1,3)$，$(2,3,1)$，$(3,1,2)$，$(3,2,1)$ のいずれかである．この 6 つに対して，実際に偶置換か奇置換かを判定する計算を行うことで，この補助定理を得る．

定理 7.4 の証明．
(1) 完成形の配置を $(1,2,3,4)$ とおく．キューブの 2 面体配置は (a,b,c,d)(ただし，$\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$) とおける．4 つの 2 面体がどれも完成の位置にないという仮定より，

$$a \neq 1,\ b \neq 2,\ c \neq 3,\ d \neq 4 \qquad (*1)$$

である．基本手順 7 は条件 6 を保存する (補助定理 7.5(1)) ので，$a = 1$ または $d = 2$ または $b = 3$ または $c = 4$ を示せばよい．そうでない，すなわち，

$$a \neq 1,\ d \neq 2,\ b \neq 3,\ c \neq 4 \qquad (*2)$$

を仮定する．$(*1)$ より，$a \neq 1$ である．a の値で場合分けを行う．
(i)$a = 2$ のとき：$\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$ より $c \neq 2$ であり，$(*1),(*2)$ より $c \neq 3$，$c \neq 4$ であるため $c = 1$ である．$c = 1$ と $\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$ より $b \neq 1$ であり，$(*1),(*2)$ より $b \neq 2$，$b \neq 3$ だから $b = 4$．よって $d = 3$．まとめると，

$$(a,b,c,d) = (2,4,1,3)$$

である．
(ii)$a = 3$ のとき：(i) と同様に考えて，

$$(a,b,c,d) = (3,4,2,1)$$

である．
(iii)$a = 4$ のとき：(i) と同様に考えて，

$$(a,b,c,d) = (4,1,2,3)$$

である．
(i),(ii),(iii) より，

$$(a,b,c,d) = (2,4,1,3),\ (3,4,2,1),\ (4,1,2,3)$$

である．ここで，

$$\begin{pmatrix} 2, & 4, & 1, & 3 \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3, & 4, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4, & 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

が偶置換か奇置換かを実際に計算すると，どれも奇置換とわかる．これは補助定理 7.6 に矛盾する．よって (1) が成り立つ．

(2) キューブを置きかえて，条件 6 を保存しながら完成の位置にある 2 面体が L 面にくるようにできることは明らかである．置きかえ後の形のキューブの完成形の 2 面体配置を $(1,2,3,4)$ とおく．するとそのときの 2 面体配置は $(1,a,b,c)$(ただし $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$) とおける．ここで補助定理 7.7 と同様の計算と補助定理 7.6 を用いると，

$(1,\ a,\ b,\ c)$=$(1,\ 4,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 3,\ 4,\ 2)$，$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

とわかる．補助定理 7.5(2) より，これらは基本手順 7 を高々 2 回繰り返すことにより，次のように完成形の配置になる．

$(1,\ 4,\ 2,\ 3)$
↓ Step7 の基本手順
$(1,\ 3,\ 4,\ 2)$
↓ Step7 の基本手順
$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

補助定理 7.5(1) から，上の手順も条件 6 を保存する．よって，(2) が示された．

参考文献

[1] 島内 剛一：「ルービックキューブと数学パズル (数学ひろば)」，日本評論社，東京，2008

[2] 川辺 治之：「群論の味わい -群置換で解き明かすルービックキューブと 15 パズル-」，共立出版，東京，2010

[3] 「ルービックキューブ 6 面攻略」，
http://www.synapse.ne.jp/˜ telepathy/rubiks
/index.htm

[4] 「ルービックキューブ (ウィキペディア)」，
http://ja.wikipedia.org/wiki/