# Control Moment Gyroscope に対する<br>出力レギュレーションを用いた非線形制御

2011SE075 井奈波徹

指導教員：高見勲

## 1 はじめに

Control Moment Gyroscope (以下，CMG) は，力学的拘束条件 (角運動量保存則) と劣駆動システム (入力の数より，制御する対象の状態の自由度の方が多い) という特性をもつ非線形システムである．このようなシステムの多くは，平衡点における線形近似系が可制御でないため，線形制御をそのまま適用することができない．そこで，本研究では，非線形システムをハミルトンの正準方程式で表現し，出力レギュレーション制御を適用することで，保存量をもつシステムの部分的な安定化を保証する．Ishikawa, Sakamoto et al. [1] では，システムの角速度制御に対して成果があげられている．本研究では，Gimbal3 の角度 $q_3$ を制御する状態として追加し，Gimbal2, Gimbal3 の角度 $q_2, q_3$ の角度制御を行う．

## 2 数理モデル

CMG には Rotor1 を回転させる Motor1 のトルク $T_1(t)$ と Gimbal2 を傾ける Motor2 のトルク $T_2(t)$ が存在する．Rotor1 の角度，角速度を $q_1(t), \omega_1(t)$，Gimbal2 の角度，角速度を $q_2(t), \omega_2(t)$，Gimbal3 の角度，角速度を $q_3(t), \omega_3(t)$ と定義する．本研究は，Gimbal3 の角度制御を目的とする．CMG の Lagrangian $L$ は，以下のようになる．

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\{&J_B\omega_3^2 + (I_C+I_D)\omega_2^2 + (J_C+J_D)\omega_3^2\cos^2(q_2) \\ &+(K_C+I_D)\omega_3^2\sin^2(q_2) + J_D(\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_3\cos(q_2))\} \end{aligned} \tag{1}$$

$I_D$, $J_D$: Rotor1 の慣性モーメント [kg・m$^2$]<br>
$I_C$, $J_C$, $K_C$: Gimbal2 の慣性モーメント [kg・m$^2$]<br>
$J_B$: Gimbal3 の慣性モーメント [kg・m$^2$]<br>
(1) 式は，$q_3$ を含まず，これは運動量保存の存在を表していることがわかる．また，一般化運動量 $p_1, p_2, p_3$ は，以下のようになる．

$$\begin{aligned} p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \omega} \\ &= \begin{bmatrix} J_D\omega_1 + J_D\omega_3\cos(q_2) \\ (I_C+I_D)\omega_2 \\ (J_2 - J_1\sin^2(q_2))\omega_3 + J_D\omega_1\cos(q_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

一般化運動量 $p_i$，角度 $q_i\,(i=1,2,3)$ より，角速度 $\dot{q}$ は，以下のようになる．

$$\begin{aligned} \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(J_2-J_1\sin^2(q_2))p_1 - J_D\cos(q_2)p_3}{J_D(J_4-J_3\sin^2(q_2))} \\ \frac{p_2}{I_C+I_D} \\ \frac{p_3-\cos(q_2)p_1}{J_4-J_3\sin^2(q_2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

### 2.1 ハミルトニアン

(1) 式から運動方程式を導出した場合，角度などのシステムの座標だけでなく，座標の一階微分を含む拘束を受けるシステム (一階非ホロノミックシステム) となってしまう．この拘束受けるシステムの制御は複雑となることが知られている．これを避けるためにハミルトニアンを用いて，一般化運動量 $p_i$ を用いたシステムを表現する．

ハミルトニアン $H_{cmg}$ を以下のように定義する．

$$H_{cmg} = p^T\dot{q} - L \tag{4}$$

Euler-Lagrange の運動方程式より，$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & 0 \end{bmatrix}^T$ とすると，

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p} - T \tag{5}$$

となり，以上 (4)，(5) 式よりハミルトンの正準方程式は，

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H_{cmg}}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H_{cmg}}{\partial q} + T \end{cases} \tag{6}$$

となる．よって，状態方程式は以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_2}{I_C+I_D} \\ \frac{p_3-\cos(q_2)p_1}{J_4-J_3\sin^2(q_2)} \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\alpha = \sin(q_2)\frac{(J_5p_1^2 - J_6\cos(q_2)p_1p_3 + J_6p_3^2)\cos(q_2) - J_5p_1p_3}{(J_4-J_3\sin^2(q_2))^2}$$

$$\begin{aligned} J_1 = J_C + J_D - K_C - I_D,\ J_2 = J_B + J_C + J_D \\ J_3 = J_C - K_C - I_D,\ J_4 = J_B + J_C \\ J_5 = J_1 - J_2,\ J_6 = J_1 - J_D \end{aligned}$$

### 2.2 出力レギュレーション

以下の非線形系を考える．

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x,w) + g(x,w)u,\ x(0) = x_0 \\ &v = h(x,w) \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，$x \in \mathrm{R}^n$ は状態，$u \in \mathrm{R}^m$ は制御入力，$v \in \mathrm{R}^p$ はレギュレート出力を表す．及び，目標や外乱を表す信号 $w \in \mathrm{R}^q$ は，以下で定式化される外部システム (exosystem) から生成されるとする．

$$\dot{w} = s(w), \ w(0) = w_0 \tag{9}$$

上記モデルの線形近似系を，以下のように示す．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Pw \\ \dot{w} &= Sw \\ v &= V_x x + V_w w \end{aligned} \tag{10}$$

**仮定 1** (Neutral Stability) 外部システム (9) の平衡点 $w = 0$ は Lyapunov 安定であり，$w = 0$ の開近傍 $W \subset \mathrm{R}^q$ が存在し，$W$ の各点は Poisson 安定である．さらに，$S = \frac{\partial s}{\partial w}(0, 0)$ の固有値は，すべて虚軸上にある．
**仮定 2** (Linear Stability) 組 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\,,\, g(0, 0)\right)$ は可安定である．
**定理 1** 以上の仮定が成り立つとする．このとき，出力レギュレーション問題の可解となるための必要十分条件は，原点近傍の $w \in W$ で定義された十分滑らかな関数 (写像) $\pi : W \to \mathrm{R}^n$, $c : W \to \mathrm{R}^m$ で $\pi(0) = 0$, $c(0) = 0$ と以下のレギュレータ方程式を満たすものが存在することである．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w)) + g(\pi(w))c(w) \\ 0 &= h(\pi(w), w) \end{aligned} \tag{11}$$

本研究では，制御量 $v$ を以下のように選び，平衡点 $x^*$ で線形近似を行い線形係数行列を導出する．

$$v = \begin{bmatrix} q_2 & q_3 - \frac{\pi}{2} & \frac{p_2}{I_C + I_D} & -p_3 + \cos(q_2)p_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$x^* = [q_2^* \quad q_3^* \quad p_1^* \quad p_2^*]^{\mathrm{T}} = [0 \quad \tfrac{\pi}{2} \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

各線形係数行列は，以下のように定義される．

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \ \ P = \frac{\partial f}{\partial w}(0, 0), \ \ B = g(0, 0), \\ S &= \frac{\partial s}{\partial w}(0), \ \ V_x = \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0), \ \ V_w = \frac{\partial h}{\partial w}(0, 0). \end{aligned} \tag{14}$$

## 3 制御系設計

本研究では，出力レギュレーションの枠組みを用いて，サーボシステムを構成し，駆動源のない Gimbal3 の角度 $q_3$ の目標値追従制御を行う．

(10) の拡大系を以下のように示す．

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & P & O \\ O & S & O \\ V_x & V_w & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ O \\ O \end{bmatrix} u \tag{15}$$

$$x = [q_2 \quad q_3 \quad p_1 \quad p_2]^{\mathrm{T}}, \ w = p_3, \ z = \int_0^{\mathrm{T}} v \, d\tau$$

偏差 $\tilde{x}$, $\tilde{z}$, $\tilde{u}$ を以下のように定義する．

$$\tilde{x}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix}, \tilde{u} := u(t) - u_\infty \tag{16}$$

以上より，状態変数を $\tilde{x}$, $\tilde{z}$ とする拡大偏差システムは，以下のようになる．

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{\mathrm{e}}(t) = A_{\mathrm{e}}\tilde{x}_{\mathrm{e}}(t) + B_{\mathrm{e}}\tilde{u}(t) \\ v(t) = V_{\mathrm{e}}\tilde{x}_{\mathrm{e}}(t) \end{cases} \tag{17}$$

$$A_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} A & O \\ -V_x & O \end{bmatrix}, B_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix}, V_{\mathrm{e}} = [-V_x \quad O]$$

実験において，極 ($A_{\mathrm{cl}} := A_{\mathrm{e}} + B_{\mathrm{e}}K_{\mathrm{e}}$ の固有値) を原点から離れた位置に配置すると，Gimbal3 が大きく振動する．そこで，LMI に基づく制御系設計を行い，最適レギュレータ問題の評価関数 $\tilde{J}$ を導入する．重み行列 $Q_{\mathrm{e}} \geq 0$, $R_{\mathrm{e}} > 0$ を定義し，その評価関数 $\tilde{J}$ を最小化するようなコントローラを設計する．$A_{\mathrm{cl}} := A_{\mathrm{e}} + B_{\mathrm{e}}K_{\mathrm{e}}$ の固有値 $\lambda$ を中心 $(-3, 0)$，半径 3 の円領域に配置するという拘束条件の下で，評価関数を最小化するようなコントローラのゲイン $k$ を設計し，以下の LMI 条件を得る．また，$Q_{\mathrm{e}} = Q_{\mathrm{h}}^{\mathrm{T}}Q_{\mathrm{h}}$ を満足する正方行列であり，$Q_{\mathrm{h}} = \mathrm{diag}\{\sqrt{q_1}, \cdots, \sqrt{q_n}\}$ である．

$$\begin{bmatrix} q_c\mathrm{He}[A_{\mathrm{e}}X + B_{\mathrm{e}}F] + (r_c^2 - q_c^2)X & A_{\mathrm{e}}X + B_{\mathrm{e}}F \\ * & X \end{bmatrix} > 0,$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\mathrm{He}[A_{\mathrm{e}}X + B_{\mathrm{e}}F] & * & * \\ Q_{\mathrm{h}}X & I & * \\ \hline R_{\mathrm{e}}F & O & R_{\mathrm{e}} \end{array}\right] > 0, \ \begin{bmatrix} Z & * \\ I & X \end{bmatrix} > 0 \tag{18}$$

## 4 シミュレーション

設計した制御則を用いてシミュレーション · 実験より理論の有用性を検証する．初期値を以下のように設定し，シミュレーション · 実験結果を図 1，2 に示す．以下の，図 1，2 より，Gimbal2,3 の角度は目標値に追従していることがわかる．

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \ w(0) = 0.$$

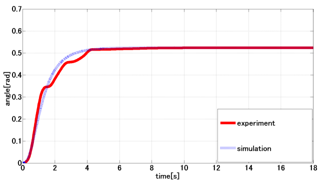


図 1 Gimbal2 angle

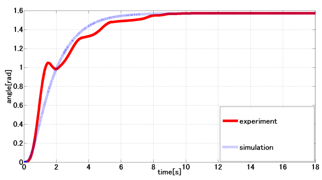


図 2 Gimbal3 angle

## 5 おわりに

本研究の成果として，Hamilton の正準方程式より，Gimbal3 を制御する状態として追加した CMG の状態方程式を導出した．設計した制御則を用いてシミュレーション · 実験より理論の有用性を検証した．

## 参考文献


[1] K.Ishikawa, N.Sakamoto and D.Shiraki: Design of partial optimal control for a nonlinear system and application to the attitude control of a control moment gyro; *SICE Annual Conference*, 2013, pp.1865-1871.