

Anti-lock Braking System の H_∞ 制御

2011SE150 丸悠起

指導教員：陳幹

1 始めに

Anti-lock Braking System (ABS) は摩擦係数と横抗力が共に高い理想的なスリップ率 0.2 を保つことにより車輪のロックを防ぎ、ブレーキ中の操舵性を確保する。制御対象は非線形であるため線形化して制御を行う。また、ディスクリプタ表現、線形分数変換を用いて変動パラメータを含む行列を行列ポリトープ表現で表す。そして、 H_∞ ノルムを満たす LMI で定式化し、系を安定にする制御器を設計する。

2 制御対象とモデリング

2.1 モデルの線形化と状態方程式の導出

本研究で用いる ABS 実験機の簡略図を図 1 に示す。上部車輪が自動車の車輪、下部車輪が道路を現している。上部車輪にかかるブレーキトルク τ_1 を操作することでスリップ率 λ を目標値 0.2 に追従させる制御系を設計する。上部車輪、下部車輪の角速度を ω_1, ω_2 、上部車輪、下部車輪の半径を r_1, r_2 、車輪間の摩擦係数を $\mu(\lambda)$ 、バランスレバーの回転軸から車輪間の接点までの距離を L 、線分 L と車輪間の接点の法線がなす角を ϕ 、上部車輪にかかる垂直抗力を F_n とする。上部と下部の車輪の回転運動の運動方程式とスリップ率を以下のように示す。

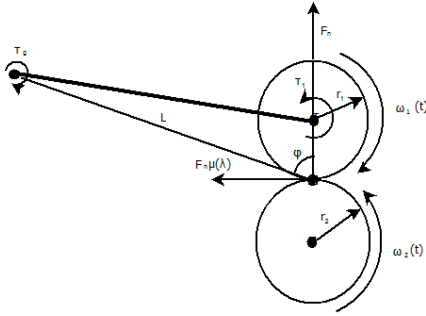


図 1 ABS 実験機の簡略図

$$J_1 \dot{\omega}_1 = F_n r_1 \mu(\lambda) - \tau_1 \quad (1)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = -F_n r_2 \mu(\lambda) \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{r_2 \omega_2 - r_1 \omega_1}{r_2 \omega_2} \quad (3)$$

$$F_n = \frac{\tau_g + \tau_1}{L(\sin \phi - \mu(\lambda) \cos \phi)} \quad (4)$$

式 (1), (2), (3), (4) より、式 (5) を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = & \frac{1}{\omega_2} \left(-\frac{r_1^2}{J_1 r_2} s(\mu) - \frac{r_2(1-\lambda)}{J_2} s(\mu) + \frac{r_1}{J_1 r_2} \right) \tau_1 \\ & + \frac{1}{\omega_2} \left(-\frac{r_1^2 \tau_g}{J_1 r_2} s(\mu) - \frac{r_2(1-\lambda) \tau_g}{J_2} s(\mu) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) は非線形であるので、平衡点 (λ^*, τ_1^*) のまわりで線形近似する [1] と以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = & \frac{1}{\omega_2} \left(\frac{c_1 s(\mu) + c_2}{c_3 s(\mu) + c_4} \right) (\lambda - \lambda^*) \\ & + \frac{1}{\omega_2} (c_5 s(\mu) + c_6) (\tau_1 - \tau_1^*) \end{aligned} \quad (6)$$

$$s(\mu) = \frac{\mu(\lambda)}{L(\sin \phi - \mu(\lambda) \cos \phi)} \quad (7)$$

ここで、 c_1 から c_6 は定数である。

2.2 拡大系

本研究では出力を目標値に追従させるために制御ループ内に積分器を状態変数に入れた。拡大系の状態変数を $x_e(t) = [\int(\lambda - \lambda^*)dt \quad \lambda - \lambda^*]^T$ 、入力を $u(t) = \tau_1 - \tau_1^*$ とする。

$$E_e \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_e u(t) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_e = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & c_1 s(\mu) + c_2 \end{bmatrix}, E_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_2 (c_3 s(\mu) + c_4) \end{bmatrix} \\ B_d = & \begin{bmatrix} 0 & c_3 c_5 s(\mu)^2 + (c_3 c_6 + c_4 c_5) s(\mu) + c_4 c_6 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

2.3 ディスクリプタ表現

ディスクリプタ変数を $x_d(t) = [x_e(t)^T \quad \dot{\lambda} \quad u(t)]^T$ とすることで、ディスクリプタ表現を用いた状態方程式は式 (9) となる。

$$E_d \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d u(t) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_d = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, E_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_d = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$C_1 = c_1 s(\mu) + c_2, C_2 = \omega_2 (c_3 s(\mu) + c_4)$$

$$C_3 = c_3 c_5 s(\mu)^2 + (c_3 c_6 + c_4 c_5) s(\mu) + c_4 c_6$$

2.4 線形分数変換 (LFT)

$s(\mu)^2$ に対して LFT を行い、後に行列ポリトープ表現を使える形にする。行列 A_n を $s(\mu)^2$ を含まない項とする。行列 A_d が

$$A_d = A_n + B_\delta \Delta C_\delta \quad (10)$$

となるような $B_\delta, C_\delta, \Delta$ を定めることで、式 (9) と等価なシステム (11) を得る。

$$\begin{cases} E_d \dot{x}_d(t) = A_n x_d(t) + B_\delta w_\delta + B_d u(t) \\ Z_\delta = C_\delta x_d(t) \\ w_\delta = \Delta Z_\delta(t) \end{cases} \quad (11)$$

新たなディスクリプタ変数を $\tilde{x}_d(t) = [x_d(t)^T \quad Z_\delta]^T$ と与えることで LFT を行ったディスクリプタ方程式は式 (12) となる。

$$\tilde{E}_d \dot{\tilde{x}}_d = \tilde{A}_d \tilde{x}_d(t) + \tilde{B}_d u(t) \quad (12)$$

$$\tilde{A}_d = \begin{bmatrix} A_n & B_\delta \Delta \\ C_\delta & -I \end{bmatrix}, \tilde{E}_d = \begin{bmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 制御器設計

3.1 H_∞ 制御

目標値 $r(t)$ から評価出力 $z(t)$ の閉ループの伝達関数の H_∞ ノルム ($\|G(s)\|_\infty$) を γ_∞ 未満にすることを考える [2]。本研究では次のシステムを考える。

$$\begin{cases} \tilde{E}_d \dot{\tilde{x}}_d(t) = \tilde{A}_d \tilde{x}_d(t) + \tilde{B}_d u(t) + B_r r(t) \\ z(t) = \tilde{C}_d \tilde{x}_d(t) + \tilde{D}_d u(t) \end{cases} \quad (13)$$

W_e, W_x, W_u をそれぞれ偏差の積分, 状態, 入力に対する重みとすると, \tilde{C}_d, \tilde{D}_d は次式となる。

$$\tilde{C}_d = \begin{bmatrix} W_e & 0 & 0 \\ 0 & W_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{D}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W_u \end{bmatrix}$$

コントローラは $u(t) = K \tilde{x}_d(t) = Y \tilde{X}_d^{-1} \tilde{x}_d(t)$ とする。

3.2 ポリトープ表現

本研究では, 車速の変動範囲 V が $10 \leq V \leq 50$ の時に対してロバスト安定性を保証する。ここで, $V = r_2 \omega_2$ である。また, 路面状況が変化した場合においてもロバスト安定性を保証する。摩擦係数の変動範囲は $0.1 \leq s(\mu) \leq 0.7$ である。これらを考慮し, ω_2 と $s(\mu)$ の最大値と最小値を示す。

$$\begin{aligned} \omega_2 &\in [\omega_{2min}, \omega_{2max}] = [28.0584, 140.2918] \\ s(\mu) &\in [s(\mu)_{min}, s(\mu)_{max}] = [0.4624, 5.1190] \end{aligned}$$

行列 \tilde{A}_d の変動範囲の端点行列を $\tilde{A}_{d1}, \tilde{A}_{d2}, \tilde{A}_{d3}, \tilde{A}_{d4}$ とする。

3.3 LMI 定式化

3.1, 3.2 より, 以下の LMI 条件を満たす $\tilde{X}_d, Y, \gamma_\infty$ が存在すればシステムは安定となり, $\|G(s)\|_\infty < \gamma_\infty$ を保証するフィードバックゲイン K が導出される。

$$\begin{bmatrix} He[\tilde{A}_{di} \tilde{X}_d + \tilde{B}_d Y] & B_r & \tilde{X}_d^T \tilde{C}_d^T + Y^T \tilde{D}_d^T \\ B_r^T & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ \tilde{C}_d \tilde{X}_d + \tilde{D}_d Y & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\tilde{X}_d = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}, X_{11} > 0$$

4 シミュレーションと実験

求めたコントローラを用いてシミュレーションと実験を行った。 W_e, W_x, W_u をそれぞれ以下のように定め, 速度の範囲 V を $10 \leq V \leq 50$ でシミュレーションを行った。

$$W_e = 7, W_x = \text{diag}(5 \ 0), W_u = 1$$

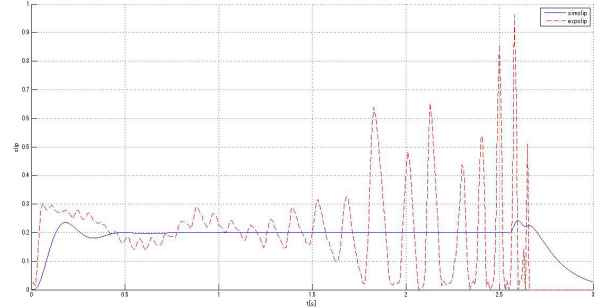


図2 スリップ率

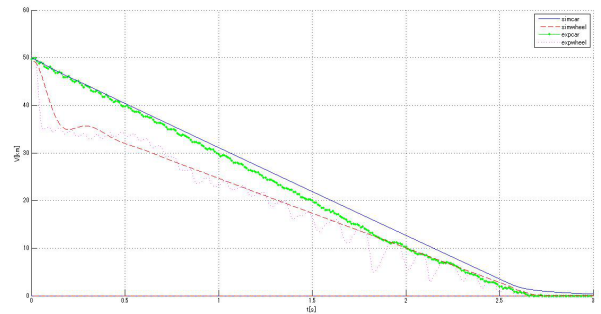


図3 車体, 車輪速度

スリップ率の立ち上がりは早いが大い。その後も目標値 0.2 近傍だが振動している。さらに, ポリトープで保証した範囲内でスリップ率の発散が始まっていることと, 停止するまでの時間にシミュレーションと誤差が生じていることもわかる。

5 終わりに

H_∞ 制御理論を用いた ABS の制御と, そのシステムを用いた実験による検証を行った。シミュレーションと実験結果で停止するまでの時間に多少の誤差が生じた。また, ポリトープの保証範囲内でスリップ率の発散も見られた。これらの結果から, 数学モデル・制御器の見直しや, より高度なシステム同定を行うことで改善できると考えられる。

参考文献

- [1] Idar Petersen, Tor A. Johansen, Jens Kalkkuhl and Jens Ludemann, "Wheel Slip Control in ABS Brakes Using Gain Scheduled Constrained LQR", Proc. European Contr. Conf., Porto, pp. 606-611.
- [2] 細江繁幸, 荒木光彦, "制御系設計- H_∞ 制御とその応用", システム制御情報学会, 1994