教科書比較を用いた授業構想
～高等学校数学『対数』を中心として～

2011SE187　中原圭太
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，教科書比較を用いて授業構想を行うことである．その動機は，教職を目指す上で，教科書の内容，各出版社の教科書毎の特徴，ならびに教科書の記述以外で有益なものの把握が必要と感じたからである．この構想は，視覚的理解を重視して行う．その理由は，理解する楽しさを最も感じることができると考えるからである．

また，この構想が対象とする領域は，高等学校数学 II の『対数』の分野とする．その理由は，私自身対数の分野が苦手であり，高校生の頃理解に苦しんだからである．この構想に用いる教科書は，数研出版 [1]，啓林館 [2]，東京書籍 [3]，文英堂 [4] である．本研究は [1] を主として行う．[1] を選んだ理由は，愛知県内で取り扱う学校が多いからである．

本研究の成果は，将来教員になった時にも役立つと考える．

卒業論文では，その第 2 章 2.1 節で，[1] と [2]・[3]・[4] を 3 つの観点 (グラフ・色分け・解説) で比較し，[1] に取り入れるべき内容を考察した．また，2.2 節で [1] と [2] の『対数』の導入部の比較を行い，何を補えば生徒が意欲的に学習できるかを考察した．

卒業論文の第 3 章では数研出版の教科書の行間埋めを行った．本稿では，そこからいくつかの例を抽出して示す．特に，視覚的理解に深くかかわるものを抽出した．

2　教科書の行間埋め

卒業論文の第 3 章では，[1] の第 5 章「指数関数と対数関数」の行間埋めを行った．この節では，この数研出版の教科書の行間埋めの例を 5 つ示す．各例においては，[1] の，例えば,「第 5 章第 3 節 A 対数」を，3A「A 対数」と表記する．

また各例において，行間埋めの結果は図で表現する．それらの図は [1] の引用に説明・色分けを補うことで作成されている．そこで補った内容は，色つきの枠で囲ったり，その内容自体に色をつけて引用部分と区別している．より具体的な約束を以下に示す．

- 補った内容・解説はオレンジ枠で囲うものとする．
- 生徒に留意させたい部分には赤の下線を加えるものとする．

例 1(対数の公式)

図 1 は [1] の 3A「A 対数」に関する記述を補った図である．

ここでは，太字部分の色付けとオレンジ枠の説明を補っている．さらに，太字部分は条件の位置も変更している．その太字部分の色付けにより，指数表現 ($a^p = M$)，対数表現 ($p = \log_a M$) における記号の対応を視覚的に理解できると考える．

オレンジ枠の説明は，例 7 に対しても，上と同じ色分けを行うことを述べている．この方法で，指数と対数の関係のイメージを定着させることができ，対数を学習し始めて間もない生徒には有効と考える．なお，この枠内の色付けも太字部分の色づけと統一した色を用い，その色付けの約束の理解に負担をかけないようにしている (卒業論文における他の例でも統一した色を用いている)．

太字部分の条件の位置の変更は，具体的には，[1] では，ただし書きで式の下にあった条件の，1 行目への移動である．上にある方がより意識して読むと考えたため，この変更を行った．

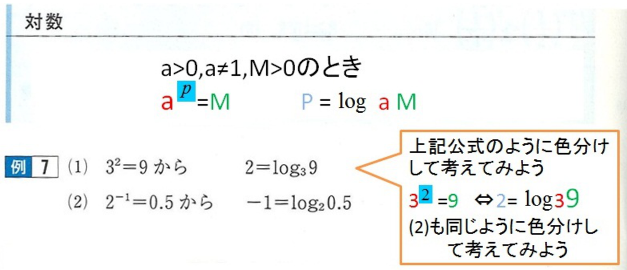


図 1　対数の公式

例 2(対数の性質)

図 2 は [1] の 3B「B 対数の性質」の冒頭の記述を補った図である．

図 2 の前半では，6 つの等式に赤字で番号付けを行っている．導出関係にある 2 式が同じ番号になるように行っている．さらに，その導出関係の理由を，1 つ目のオレンジ枠内に補っている．その枠内でも番号付けが対応するようにしている．以上の行間埋めには，既習の内容の復習としてそれらを定着させる効果があると考える．

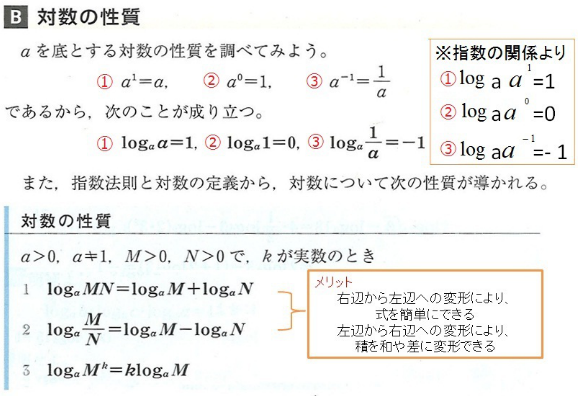
後半では，2 つ目のオレンジ枠に 3 つの性質のメリットを補っている．このメリットを示すことにより，生徒のなぜ学習するのかという疑問に応えられると考える．さらに，その疑問の解決が，生徒の意欲向上につながると考える．

なお，このメリットの具体例は，卒業論文の例 3.2.3 に示している．

例 3(対数関数のグラフの作図)

図 3 は [1] の 4A「A 対数関数のグラフ」の冒頭部分を補った図である．

図 3 の表は，そこで空欄になっている部分にも [1] においては値が記入されていたが，この研究でそれらのいく



B 対数の性質

a を底とする対数の性質を調べてみよう。

① $a^1=a$,　② $a^0=1$,　③ $a^{-1}=\frac{1}{a}$

であるから，次のことが成り立つ。

① $\log_a a=1$, ② $\log_a 1=0$, ③ $\log_a \frac{1}{a}=-1$

※指数の関係より
① $\log_a a^1=1$
② $\log_a a^0=0$
③ $\log_a a^{-1}=-1$

また，指数法則と対数の定義から，対数について次の性質が導かれる。

対数の性質

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$ で，k が実数のとき

1 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

2 $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

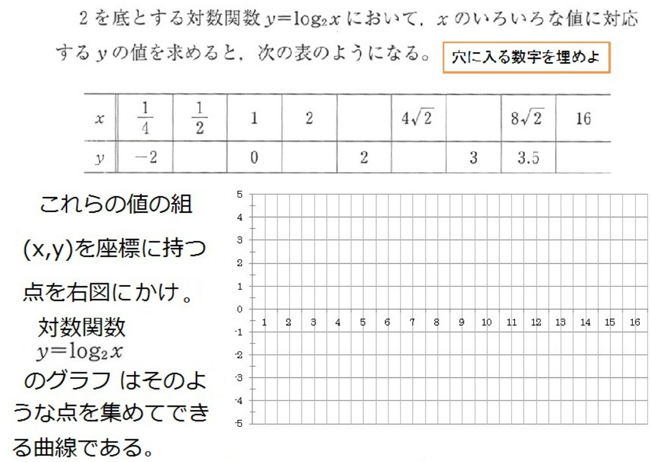
3 $\log_a M^k=k\log_a M$

メリット
右辺から左辺への変形により，式を簡単にできる
左辺から右辺への変形により，積を和や差に変形できる

図 2　対数の性質

つかを削除した．実際に対数関数の表を作ることにより，イメージを定着できると考える．

また，この表の直後に [1] ではグラフが与えられているが，図 2 においては，そのグラフを削除し座標のみを残している．この座標平面上に $y=\log_2 x$ のグラフを実際に書き込むことにより，対数関数のグラフのイメージを定着できると考える．



2 を底とする対数関数 $y=\log_2 x$ において，x のいろいろな値に対応する y の値を求めると，次の表のようになる。　穴に入る数字を埋めよ

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2		$4\sqrt{2}$		$8\sqrt{2}$	16
y	-2		0		2		3	3.5	

これらの値の組 (x,y)を座標に持つ点を右図にかけ。
対数関数 $y=\log_2 x$ のグラフ はそのような点を集めてできる曲線である。

図 3　対数関数のグラフの作図

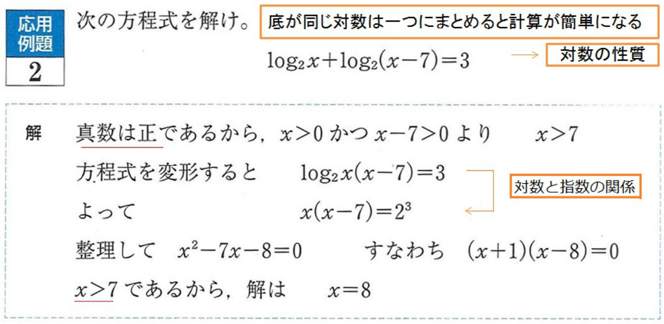
例 4(対数関数を含む不等式 (一般形))

図 4 は，[1] の応用例題 2(p.168) の解を補った図である．

応用例題になり，やや難易度が上がる．そこで，考え方の指針を加え (1 つ目のオレンジ枠)，計算を簡単にするために対数の性質を用いることを補う (2 つ目のオレンジ枠).

また，解の最初に示してある真数条件は重要なので赤の下線で強調する．対数表現から指数表現に直す部分には，矢印とともに再度関係を示す (3 つ目のオレンジ枠).最後の行の真数条件 ($x>7$) の吟味も重要なので，ここも赤の下線で強調する．

これらにより，対数の方程式の解き方，(とくに真数条件の吟味が必要であること) をより身につけることができると考える．



応用例題 2　次の方程式を解け。　底が同じ対数は一つにまとめると計算が簡単になる

$\log_2 x+\log_2(x-7)=3$　→ 対数の性質

解　真数は正であるから，$x>0$ かつ $x-7>0$ より　$x>7$

方程式を変形すると　$\log_2 x(x-7)=3$　対数と指数の関係

よって　$x(x-7)=2^3$

整理して　$x^2-7x-8=0$　すなわち　$(x+1)(x-8)=0$

$x>7$ であるから，解は　$x=8$

図 4　対数を含む不等式 (一般形)

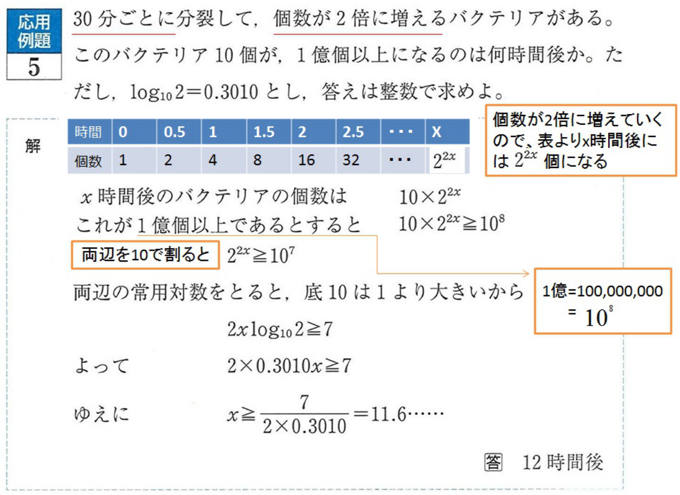
例 5(日常生活への応用例（p.173）)

図 5 は [1] の応用例題 5(p.173) の解を補った図である．

まず，問題の内容を理解させるために，解の最初にバクテリアの個数の変化を表す表とその解説 (1 つ目オレンジ枠) を補っている．ともなって，この表を作成するのに必要な情報を示す「30 分毎に」と「個数が 2 倍に増える」には赤の下線を引いている．

また，解の説明文では途中計算が省かれているので，これも補う (2 つ目オレンジ枠)．さらに，問題文にある 1 億個という個数を，桁数で考えることのよさを示すために，実際に 1 億という数字を 0 を並べて示す (3 つ目オレンジ枠).

これらにより，生徒がより具体的なイメージを持って解くことができると考える．



応用例題 5　30 分ごとに分裂して，個数が 2 倍に増えるバクテリアがある。このバクテリア 10 個が，1 億個以上になるのは何時間後か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とし，答えは整数で求めよ。

解

時間	0	0.5	1	1.5	2	2.5	・・・	X
個数	1	2	4	8	16	32	・・・	2^{2x}

個数が2倍に増えていくので，表よりx時間後には 2^{2x} 個になる

x 時間後のバクテリアの個数は　10×2^{2x}

これが 1 億個以上であるとすると　$10\times2^{2x}\geqq10^8$

両辺を10で割ると　$2^{2x}\geqq10^7$

両辺の常用対数をとると，底 10 は 1 より大きいから　1億=100,000,000 = 10^8

$2x\log_{10}2\geqq7$

よって　$2\times0.3010x\geqq7$

ゆえに　$x\geqq\frac{7}{2\times0.3010}=11.6\cdots\cdots$

答　12 時間後

図 5　日常生活への応用例 (p.173)

参考文献

[1] 川中宣明　他 13 名,『数学 II』，数研出版，東京，平成 24 年.

[2] 高橋陽一郎　他 33 名,『数学 II』，新興出版社啓林館，大阪，平成 24 年.

[3] 俣野博・河野俊　他 27 名,『数学 II』，東京書籍株式会社，東京，平成 24 年.

[4] 竹之内脩　他 12 名,『数学 II』，文英堂株式会社，東京，平成 22 年.