3 次元アナモルフォーシス

2011SE277 都築　大

指導教員：杉浦　洋

1　はじめに

平面鏡で物を映す場合には，左右は逆になるが見たままに像が映る．しかし，鏡を曲げて円筒にしたり，球面にした場合には，像の見え方は実物と大きくかけ離れる．アナモルフォーシスとは，歪んだ画像を円筒などに投影したり，角度を変えてみることで正常な形が見えるようになるデザイン技法の一つである．このような歪曲された絵は日本語で「歪み絵」と訳される．これらは 16 世紀以降に遠近法の技術からヨーロッパで発展し，多くの画家がアナモルフォーシスの製作に取り組むようになった．遠近法と普通に言われている透視図法は，3 次元の世界を 2 次元の世界に移し変える．つまり，立体を平面上に表現するトリック図法である．遠近法とは，あらゆる絵画表現の遠近関係や空間の表し方を指す．また，線遠近法いわゆる幾何学的な遠近関係を表現する方法を指すこともある [3].

この歪み絵は，一見すると何が書いてあるのかわからない不思議な絵である．このように普通に見ても何が描かれているのかわからないという意味で，アナモルフォーシスでは描かれているものが隠される．したがって，これはだまし絵の一種である [2]．だまし絵はいろいろな種類があって，一筋縄ではいかない [1].

3 次元円筒鏡の反射に入る前に 2 次元円筒鏡の反射について調べる．2 次元の場合，机面 P 上の点 $\boldsymbol{p}$ から出た光は円筒内部に仮想的な平面 S(スクリーン) のどの部分と対応しているのかを，$P_{ij} \to S_{ij}$ といったように求めていく．逆に 3 次元の場合は，円筒鏡に写った物体 $\boldsymbol{s}$ が，机面 P 上の点 $\boldsymbol{p}$ のどこに対応しているのかを，$S_{ij} \to P_{ij}$ といったように求めていく．

アナモルフォーシスを題材にして，変換術を作り出す空間思考の力の育成を図る [4].

2　円筒鏡アナモルフォーシス画像の製作

机上に垂直に円筒鏡を置いたとき，机上の絵がどのように円筒鏡に写るかを幾何光学的に調べる．

円筒内部に仮想的な平面（スクリーン）S を置く．机面 P 上の点 $\boldsymbol{p}$ から出た光は，円筒面上の点 $\boldsymbol{q}$ で反射して，目 $\boldsymbol{m}$ に入る．$\boldsymbol{m}$ から $\boldsymbol{q}$ への線分の延長とスクリーン S との交点を $\boldsymbol{s}$ とすると，目からは光は $\boldsymbol{s}$ から来たように見える．そこで，S 上に見たい写真をはり付けたと考え，その写真の $\boldsymbol{s}$ 上の色を机上の $\boldsymbol{p}$ に付ければ $\boldsymbol{m}$ からは，$\boldsymbol{s}$ 上に $\boldsymbol{p}$ の色が見える．P 上のすべての点をそのように着色すれば，円筒鏡内に見たい写真がみえるはず．これがアナモルフォーシスの原理である．

まずはじめに，2 次元の単位円での反射問題を考える．x 軸上に置かれた目の位置を $\boldsymbol{m} = (m_x, 0)$ とする．点 $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$ からでた光が，円筒面の点 $\boldsymbol{q} = (x, y)$ で反射して，目に達したとする．$\boldsymbol{p}$ と目の位置 $\boldsymbol{m}$ が与えられたとき，反射点 $\boldsymbol{q}$ を求める．

xy 平面における原点の中心の単位円 C

$$x^2 + y^2 = 1$$

を鏡として，C 外の点 $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$ から出た光が円 C 上の点 $\boldsymbol{q} = (x, y)$ で反射して，目 $\boldsymbol{m} = (m_x, m_y)$ に入ったとする．$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}$ から $\boldsymbol{q}$ を求める問題を考える．簡単なため $m_x > 1, m_y = 0$ とする．原点 $\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{q}$ を通る直線を l とみて，l に関して $\boldsymbol{m}$ と線対象な点 $\boldsymbol{m}'$ は $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ を通る直線上にあり，$\boldsymbol{q}$ から見て $\boldsymbol{p}$ と同じ方向にある．すなわち，

$$\boldsymbol{m}' - \boldsymbol{q} = 2\{\boldsymbol{q} \cdot (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q})\}\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q}) = r(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}),$$

$$r = \frac{\|\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q}\|}{\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\|}$$

である．したがって，

$$\frac{(\boldsymbol{m}' - \boldsymbol{q})_x}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})_x} = \frac{(\boldsymbol{m}' - \boldsymbol{q})_y}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})_y} = r > 0 \tag{1}$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y$ はベクトル $\boldsymbol{a} \in R^2$ の x, y 成分である．(1) の最初の等号を整理して，

$$x^2 + y^2 = 1$$

より y を消去すると，x の 4 次方程式

$$\begin{aligned}
&- 2m_x p_x - p_x^2 + m_x^2\left(p_y^2 - 1\right) \\
&+ 2m_x\left(2m_x p_x + 2p_x^2 + p_y^2\right)x \\
&+ \left\{2m_x p_x + p_x^2 + p_y^2 + m_x^2\left(1 - 4p_x^2 - 4p_y^2\right)\right\}x^2 \\
&- 4m_x\left(m_x p_x + p_x^2 + p_y^2\right)x^3 + 4m_x^2\left(p_x^2 + p_y^2\right)x^4 = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

が得られる．この 4 次方程式は 4 実解をもつ．そのうち 2 つは (1) の最左辺が負となり除外される．また一つは負の解となり，目 $(m_x > 1)$ から見て，円でかくれて見えない点で反射しているので除外する．こうして残った 1 つを解として選ぶことができる．

次に，高さ z を含めた三次元の反射を考える．目を $\boldsymbol{m} = (m_x, 0, m_z)$，机上の点を $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, 0)$ としたとき，反射点を $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ を求める．真上から見たとき、円筒鏡は 2 次元円鏡であるから，単位円の反射問題を解くことで x, y が求まる．

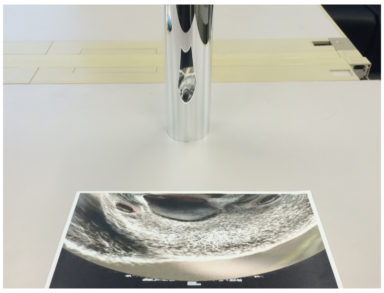
$\boldsymbol{q}$ での円筒の接平面 T は，x, y 平面と垂直なので z は m_z, p_z を

$$\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\| : \|\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q}\|$$

に内分する．よって，

$$z = \frac{\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\| m_z + \|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{q}\| p_z}{\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\| + \|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{q}\|}$$

である．



3　円筒鏡アナモルフォーシス立体の設計

円筒鏡の内部には外界を写した歪んだ小世界が見える．外界の立体像 A は円筒内小世界の歪んだ立体 A' として見える．この逆問題を解くことが，円筒鏡アナモルフォーシス立体の設計である．すなわち，円筒鏡内の小世界における任意の立体像 A' に対応する外界の原像 A の形状を求めることである．像 A' の表面に稠密に点 $\boldsymbol{s}_i$ をとり，A' の表面を $\boldsymbol{s}_i$ を頂点とする微小な多角形から成る多面体 B' で近似する．頂点 $\boldsymbol{s}_i$ に写り込む外界の点 $\boldsymbol{p}_i$ を計算し，それらを頂点とする多面体 B を作る．B は，A' の原像 A の近似多面体となる．

そこで，問題は円筒内の点 $\boldsymbol{s}$ と鏡像関係にある外界の点 $\boldsymbol{p}$ を求めることに帰着される．

円筒内の点を $\boldsymbol{s} = (s_x, s_y, s_z)$，目を $\boldsymbol{m} = (m_x, 0, m_z)$ とする．求めるべき円筒外の点を $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ とする．$\boldsymbol{p}$ から出た光は円筒表面の $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ で反射して $\boldsymbol{m}$ に入るが，それが $\boldsymbol{s}$ から来た光に見えるためには $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}$ が一直線上にあればよい．

まず，はじめに $\boldsymbol{q}$ は線分 $\boldsymbol{ms}$ と鏡面の交点にあることから求める．

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{3}$$

$$y = \frac{s_y}{s_x - m_x}(x - m_x) \tag{4}$$

2 式より，(4) を (3) に代入し，x の大きい方採用する．

$$x^2 + \left(\frac{s_y}{s_x - m_x}(x - m_x)\right)^2 = R^2$$

q_z は m_z と s_z を $(m_x - x) : (x - s_x)$ に内分した点をとる．

$$z = q_z = \frac{(x - s_x)\cdot m_z + (m_x - x)\cdot s_z}{m_x - s_x}$$

次に，$\boldsymbol{s}'$ を求める．

$\boldsymbol{q}$ における鏡面の法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{q}_x, \boldsymbol{q}_y, 0)$ である．反射の法則から，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{q}+\boldsymbol{n}$ は同一平面上．

$$\angle \boldsymbol{mq}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{n}) = \angle \boldsymbol{pq}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{n}) = \theta$$

となる．

$\boldsymbol{m}$ から直線 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{n})$ におろした垂線と直線 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{n})$ の交点を h とすると，

$$h - \boldsymbol{q} = (\cos\theta)\cdot\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{q}\|\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} \tag{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{n}\|\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{q}\|} \tag{6}$$

より，(6) を (5) に代入して整理すると，

$$h = \frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{q} \tag{7}$$

となる．

次に，$\boldsymbol{qs}'$ を α 倍に伸ばしたところに点 $\boldsymbol{p}$ をとる．($\boldsymbol{p}$ から鏡面の点 $\boldsymbol{q}$ で反射した光は $\boldsymbol{m}$ に入る．それは，$\boldsymbol{s}$ からきた光に見える．)

反射の法則から，h に対して $\boldsymbol{m}$ と対称な点 $\boldsymbol{m}'$ は線分 $\boldsymbol{qp}$ 上にある．

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m} + 2(h - \boldsymbol{m}) = 2h - \boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + \alpha\frac{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{q}\|}{\|\boldsymbol{m}'-\boldsymbol{q}\|}(\boldsymbol{m}'-\boldsymbol{q})$$

となる．

4　おわりに

本論文では，アナモルフォーシスについて幾何光学的に研究した．円筒鏡の反射を詳しく調べ，原像から像への写像を具体的に構成することにより，入力画像から円筒鏡アナモルフォーシス画像を出力する Mathematica プログラムを作成した．また，像から原像への写像を具体的に構成し，それによる円筒鏡アナモルフォーシス立体の設計法を考案した．設計されたアナモルフォーシス立体を 3D プリンタで実現して視覚効果を確かめることが今後の課題である．

参考文献

[1] 杉原厚吉：『だまし絵と線形代数』，共立出版 (2012)

[2] 杉原厚吉：『立体イリュージョンの数理』，共立出版 (2006)

[3] 野　田　和　宏：http://gospel.aid.design.kyushu-u.ac.jp/ wiki/sotsuken07/abst/2DS06147E.pdf

[4] 吉武　進：https://ir.lib.osakakyoiku.ac.jp/dspace /bitstream/123456789/3069/17/kaken15500587_182-184.pdf, https://ir.lib.osaka-kyoiku.ac.jp/dspace /bitstream/123456789/3069/18/kaken15500587_185-189.pdf