# 群論における数学文の記号化

2011SE285 渡辺啓人
指導教員：佐々木克巳

## 1　はじめに

数学の文章問題は，読解力がなければ問題の意味を知ることができず，問題を解くことができない．一方，記号化表現では，その文の構造を明確に読み取れる．このことから私は，問題を構成する数学文を記号化することで，もとの問題を理解できるようになると考えた．本研究の目的は，[2],[3] の群論の分野から抽出した数学文の記号化を行い，もとの数学文を深く理解することである．より具体的には，複雑な数学文をどのように読み解いたらよいかを，記号化によって理解したい．また，数学文を記号化する前段階として，その文に用いられている述語を表す記号を用意する必要がある．この記号を用意することも本研究の対象である．

以下の 2 節では，本研究で用いる記号を約束し，記号化の手順を説明する．3 節では，[2] から抽出した定義文を記号化する．4 節では，一般の数学文を記号化した例を示す．

## 2　記号化

この節では，[1] にしたがって，本研究で用いる記号を約束し，記号化の手順を説明する．

### 2.1　用いる記号の約束

この節では，用いる記号を約束する．

**約束 1**(変数) 変数 $n$,$m$ を自然数，$G$,$H$,$S$ を集合を表す変数として用いる．

**約束 2**（特定の集合を表す記号）記号 $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ をつぎのように用いる．

$\mathbb{N}$：自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$：整数全体の集合

**約束 3**(関数記号） 和，積に対する記号 $+$,$\cdot$,$\times$ などをふつうに用いる．

**約束 4**（論理記号．限定記号）「かつ」,「または」,「ならば」,「同値」,「でない」,「存在」,「すべて」,「ちょうど 1 つ存在」のそれぞれを表す記号 $\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\Leftrightarrow$, $\neg$,$\exists$,$\forall$,$\exists!$ を表 1 のように用いる．

**約束 5**（述語記号） 等号，不等号，“属する” を表す記号，それらの否定を表す記号，すなわち $=$,$>$,$\geq$,$\in$,$\neq$ などをふつうの意味で用いる．また，表 2 の述語記号も用いる．

**約束 6**（括弧） 結合の強さを表すための括弧 “(” と “)” をふつうに用いる．また，論理記号 · 限定記号の結合の強さは，$\neg$，$\exists x$，$\forall x$ が最も強く，$\rightarrow$，$\Leftrightarrow$ が最も弱いと約束して，そこからわかる結合の強さを示す括弧を省略する．

表 1　使用する論理記号

| 論理記号 | 使用法 | 意味 訳し方 |
|---|---|---|
| $\wedge$ | $P \wedge Q$ | かつ，さらに |
| $\vee$ | $P \vee Q$ | または |
| $\rightarrow$ | $P \rightarrow Q$ | ならば，〜のとき |
| $\Leftrightarrow$ | $P \Leftrightarrow Q$ | 同値，必要十分 |
| $\neg$ | $\neg P$ | 否定，〜でない |
| $\exists$ | $\exists x P(x)$ | 存在する, ある |
| $\forall$ | $\forall x P(x)$ | すべての |
| $\exists!$ | $\exists! x P(x)$ | ちょうど 1 つ存在 |

表 2　使用する述語記号

| 述語記号 | 使用法 | 意味 訳し方 |
|---|---|---|
| group | group$(G,\circ)$ | $G$ が $\circ$ に関して群である |
| sgroup | sgroup$(G,\circ)$ | Gが $\circ$ に関して半群である |
| cgroup | cgroup$(G,\circ)$ | $G$ が $\circ$ に関して可換群である |
| csgroup | csgroup$(S,\circ)$ | $S$ が $\circ$ に関して可換半群である |
| noncgroup | noncgroup$(G,\circ)$ | $G$ が $\circ$ に関して非可換群である |
| adgroup | adgroup$(G,\circ)$ | $G$ が $\circ$ に関して加法群である |
| bijectivegroup | bijectivegroup$(X,S,\circ)$ | $X$ が $(S,\circ)$ の全双射群である |
| subgroup | subgroup$(H,\circ,G)$ | $H$ が $(G,\circ)$ の部分群である |
| trivialsubgroup | trivialsubgroup$(H,\circ,G)$ | $H$ が $(G,\circ)$ の自明な部分群である |
| normalsubgroup | normalsubgroup$(N,\circ,G)$ | $N$ が $(G,\circ)$ の正規部分群である |
| conjugatesubgroup | conjugatesubgroup$(H',\circ,H,G)$ | $H'$ が $(H,\circ,G)$ の共役部分群である |
| normalizedgroup | normalizedgroup$(N(H),H,\circ,G)$ | $N(H)$ が $(H,\circ,G)$ の正規化群である |
| permutationgroup | permutationgroup$(H,\circ)$ | $H$ が $\circ$ に関して置換群である |
| alternatinggroup | alternatinggroup$(N,\circ,Sn)$ | $N$ が $Sn$ の交代群である |
| factorgroup | factorgroup$(G,\circ,H)$ | $G$ が $N$ の商群である |
| productgroup | productgroup$(G1\circ G2,\circ)$ | $G1\circ G2$ が $\circ$ に関して直積群である |
| finite | finite$(G)$ | 群 $G$ が有限集合である |
| fgroup | fgroup$(G,\circ)$ | $G$ が $\circ$ に関して有限群である |
| infinite | infinite$(G)$ | 群 $G$ が無限集合である |
| igroup | igroup$(G,\circ)$ | $G$ が $\circ$ に関して無限群である |
| unitgroup | unitgroup$(G,\circ)$ | $G$ がに関して単位群である |
| unit | unit$(e,S,\circ)$ | $e$ が $(S,\circ)$ の単位元である |
| lunit | lunit$(e,S,\circ)$ | $e$ が $(S,\circ)$ の左単位元である |
| runit | runit$(e,S,\circ)$ | $e$ が $(S,\circ)$ の右単位元である |
| inv | inv$(x,G,\circ,a)$ | $x$ がGにおける $a$ の逆元である |
| linv | linv$(a,S,\circ,e,b)$ | $a$ が $S$ における $b$ の左逆元である |
| rinv | rinv$(a,S,\circ,e,b)$ | $a$ が $S$ における $b$ の右逆元である |
| op | op$(\circ,S)$ | $\circ$が $S$ の演算 |
| mod | $b(\mathrm{mod}\ n)$ | $b$ は $n$ を法として合同 |
| $\mid$ | $n \mid m$ | $m$ が $n$ で割り切れる |
| # | $\#(P,e)$ | $P$ を満たす $e$ の個数 |

## 3　定義文の記号化

卒業論文では [2],[3] から抽出した 17 の定義文を記号化した．この記号化では定義される述語に対応する述語記号の追加が必要である．表 2 はそこで追加された述語記号のリストでもある．この節では卒業論文で記号化した 17 のうちの 1 つ (例 3.1) を示す．その例では，定義文に対して，その記号表現だけでなく定義された述語記号，追加する述語記号，その使用法，定義文の記号表現をかき，その後に述語記号について解説する．

**例 3.1**
定義文 ([2])：空でない集合 $G$ において演算 $\circ$ が定義され，それがつねに結合法則を満たしているとき，$G$ がこの演算 $\circ$ に関して半群をなすという．
定義された述語：$G$ が $\circ$ に関して半群である
追加する述語記号：**sgroup**
**sgroup** の使用法：$\mathbf{sgroup}(G,\circ)$
定義文の記号表現：
$G \neq \emptyset \wedge \mathbf{op}(\circ, S) \rightarrow\ (\mathbf{sgroup}(G,\circ) \Leftrightarrow \forall a\forall b\forall c(a\in G\wedge b\in G\wedge c\in G\rightarrow a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c))$
解説：上のとおり，述語記号 **sgroup** の引数は $G,\circ$ である．その理由は，定義された述語の真理値が $G$ と $\circ$ によって定まるからである．例えば，$(G,\circ)=(\mathbb{N},+)$ のとき真であり，$(G,\circ)=(\mathbb{Z},-)$ のときこの文は偽となる．なお，述語記号は半群を英語で *semi-group* ということから決めている．

## 4　一般の文の記号化

卒業論文では，[2], [3] から抽出した 24 の一般文を記号化した．この節では，そのうちの 6 つの例を示す．

**例 4.1**([2]) 閉区間 $[0,1]$ で定義された連続関数の全体 $C[0,1]$ は，$C[0,1]$ の任意の元 $f(x), g(x)$ に対して $(f\circ g)(x)=f(x)+g(x)$ なる演算に関して半群をなす．また $(f\circ g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ なる演算に関しても半群をなす．

第 1 文の記号表現：
$\forall f\forall g((f\in C[0,1]\wedge g\in C[0,1])\rightarrow\forall x(x\in[0,1]\rightarrow(f\circ g)(x)=f(x)+g(x)))\rightarrow\mathbf{sgroup}(C[0,1],\circ)$
第 2 文の記号表現：
$\forall f\forall g((f\in C[0,1]\wedge g\in C[0,1])\rightarrow\forall x(x\in[0,1]\rightarrow(f\circ g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}))\rightarrow\mathbf{sgroup}(C[0,1],\circ)$
ただし，上の 2 つの記号表現に，$C[0,1]$ の定義は反映させていない．

**例 4.2**([2]) 集合 $M$ の部分集合全体のつくる集合を $S$ とする．$S$ の 2 つの元 $A$,$B$ に対して $A\circ B=A\cup B$ なる演算を考える．$S$ はこの演算に関して可換半群をなす．また $A\circ B=A\cap B$ としても，この演算に関して $S$ は可換半群をなす．

第 2 文と第 3 文の記号表現：
$\forall A\forall B(A\circ B=A\cup B)\rightarrow\mathbf{csgroup}(S,\circ)$
第 4 文の記号表現：
$\forall A\forall B(A\circ B=A\cap B)\rightarrow\mathbf{csgroup}(S,\circ)$
ただし，上の 2 つの記号表現に $C[0,1]$ の定義は反映させていない．

**例 4.3**([2]) $S$ を単位元 $e$ を有する半群とする．$S$ の元 $a$ に対し $a$ の左逆元 $b$ が存在したとする．このとき $a\circ c_1=a\circ c_2$ が成り立つのは $c_1=c_2$ のときに限る．

第 2 文の記号表現：
$\forall a(a\in S\rightarrow\exists b(b\in S\wedge\mathbf{linv}(b,S,\circ,e,a)))$
第 3 文の記号表現：
$\forall c_1\forall c_2(c_1\in S\wedge c_2\in S\rightarrow(c_1=c_2\Leftrightarrow a\circ c_1=a\circ c_2))$

**例 4.4** ([2]) $S$ を単位元 $e$ を有する半群とする．$S$ の元 $a$ が左逆元と右逆元を持つとき，$a$ には左逆元，右逆元はおのおの 1 つしか存在せず，しかも一致する．

第 2 文の記号表現：
$\forall a(a\in S\rightarrow((\exists x(\mathbf{linv}(x,S,\circ,a))\wedge\exists x(\mathbf{rinv}(x,S,\circ,a)))\rightarrow((\#(\mathbf{linv}(a,S,\circ),a)=1)\wedge(\#(\mathbf{rinv}(a,S,\circ),a)=1))\wedge\forall y\forall z(\mathbf{linv}(y,S,\circ,a)\wedge\mathbf{rinv}(z,S,\circ,a)\rightarrow y=z)))$

**例 4.5**([3]) 整数全体 $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ は整数の加法に関して加法群である．

記号表現：
$\forall a\forall b(a\in\mathbb{Z}\wedge b\in\mathbb{Z}\rightarrow a\circ b=a+b)\rightarrow\mathbf{adgroup}(\mathbb{Z},\circ)$

**例 4.6**([3]) $G$ を群，$H$ を $G$ の部分集合とし，つぎの 3 条件が満たされるとする．
(1)$H\neq\emptyset$.
(2)$a,b\in H$ なら $ab\in H$.
(3)$a\in H$ なら $a^{-1}\in H$.
このとき，$H$ は $G$ の部分群である．

記号表現：
$\mathbf{group}(G,\circ)\wedge H\subseteq G\rightarrow((1)\wedge(2)\wedge(3)\rightarrow\mathbf{subgroup}(H,\circ,G))$
(1) の記号表現：$H\neq\emptyset$
(2) の記号表現：$\forall a\forall b(a\in H\wedge b\in H\rightarrow ab\in H)$
(3) の記号表現：$\forall a(a\in H\rightarrow a^{-1}\in H)$

## 参考文献


[1] 佐々木克巳：『記号表現から理解する数学文の構造と表現法』, 2013 年度ソフトウェア工学演習 II 講義資料,2013.

[2] 笹部貞市朗 (編)：『定理公式証明辞典』, 聖文社, 東京,1970.

[3] 斎藤正彦:『はじめての群論』, 日本評論社, 東京,2005.