コマの運動のシミュレーション

2011SE293 山田竜也

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

コマは回転しているときはなぜ倒れないか, その様子についてコンピュータのシミュレーションで詳しく調べる．コマの運動を支配しているのは剛体力学である．本研究では剛体力学について詳しく学び，それによりコマの状態を表す微分方程式を導出する．その微分方程式を数値的に解くことにより，コンピュータ上にコマの運動を再現する．Mathematica 上でコマの運動方程式を作り，得られた微分方程式は，Mathematica に組み込まれた常微分方程式の数値ソルバー NDSolve により解き，コマのモデルの動きを調べた．

2　才差と章動

回転物体に力を加えると，回転軸と力の方向の両方に直交する向きに，固定軸の周りの才差的回転を始める現象を，一般にジャイロスコープ効果という．[1] 重力の下での対称コマの才差運動は，ジャイロスコープ効果によって生じている．ただし，必ずしも実際の対称コマの運動で成り立っているわけではない．2 つのベクトル $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{\omega}$ が平行でないときには，もはや角運動量の大きさも一定ではなく，ある値の周りに複雑な運動をするようになる．この場合の計算はかなり難しいのであるが，結論だけを書けば、回転速度 $\boldsymbol{\omega}_3$ が充分大きいときは，鉛直軸周りに

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{才差}} = \frac{mgl}{\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{\omega}_3}$$

で与えられる才差運動を行うことが示される．軸対称なコマを下端を固定して回す場合を考える．コマの運動と一緒に運動する座標系を，下端を原点に軸方向に x_3，それに垂直に x_1，x_2 とする．コマの角運動量を $\boldsymbol{L}$，回転の速度を $\boldsymbol{\omega}$ と書くと，慣性系から見た運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} = -mgl(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{z}) \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k} \tag{2}$$

で与えられる．[1] ここで，慣性座標系の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ として，重心のベクトルが $\boldsymbol{r}_G = l\boldsymbol{e}_3$ とあらわされることを使った．剛体とともに運動する座標系からみると，回転軸は静止して見えるということをあらわしている．

このコマの運動については，以下の事が成り立つ．

(i) この系には次の 3 つ保存量が存在する．

$$\text{角運動量の } z \text{ 成分}: L_z = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{z}$$
$$\text{角運動量の 3 成分}: L_3 = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{k}$$
$$\text{エネルギー}: E = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\omega} + mgl\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}$$

(ii) コマの運動は，角運動量ベクトルの周りに早く回転する章動と，鉛直軸の周りをゆっくり回転する才差運動のふたつの組み合わせからなる．それぞれの角速度はコマの回転が速いときは

$$\Omega_{\text{章動}} = \frac{I_3\omega_3}{I_0} \tag{3}$$

$$\Omega_{\text{才差}} = \frac{mgl}{I_3\omega_3} \tag{4}$$

で与えられる．章動には図 1 の (a)，(b)，(c) の 3 つのパターンがある．[1]

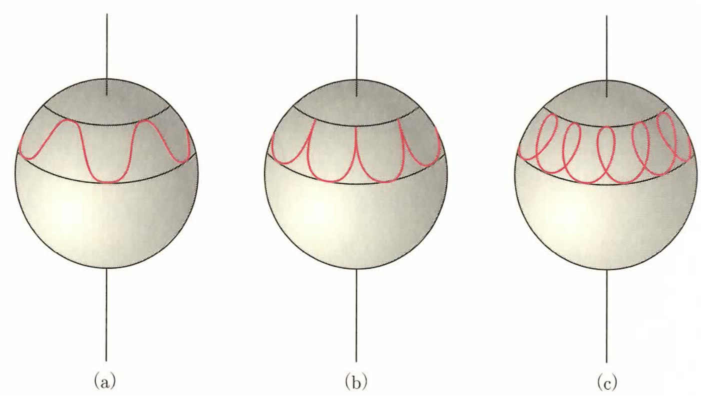

図 1　3 つの章動

3　Mathematica による数値実験

コマの半径を a，厚さを h，重力定数を g，密度を ρ，質量 m をとした，円筒形とする．ただし，軸の質量は無視するものとする．重力定数と，密度と質量を設定し，それ以外の変数，軸の傾き θ，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ のそれぞれに初期値を与え，コマの運動の変化について調べる．

3.1　微分方程式

最初は重心座標系による微分方程式の導出を行った．慣性モーメントテンソルが綺麗に求められ，コマのシミュレーションにたどり着くのが簡単だと思われたが Mathematica の微分方程式ソルバー NDSolve はこれを微分代数方程式と判断し，しかも，解くことができなかった．シミュレーションにまで至ることが出来ないと判断し，静止座標系による微分方程式に方向転換した．以下でそれを記す．

静止座標系による導出．
z 軸周りの φ 回転行列を

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y 軸周りの θ 回転行列を

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とし，静止座標の座標ベクトルを

$$\boldsymbol{x} = (1,\ 0,\ 0)$$
$$\boldsymbol{y} = (0,\ 1,\ 0)$$
$$\boldsymbol{z} = (0,\ 0,\ 1)$$

とする．原点からコマの重心に向いた単位ベクトルと，角運動量ベクトルを

$$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z), \boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$$

とする．慣性行列は

$$I(\boldsymbol{k}) = R_z(\varphi)R_y(\theta)IR_y(-\theta)R_z(-\varphi)$$

となる．$\theta = \cos^{-1} k_z$，$\varphi = \tan^{-1}(\frac{k_y}{k_x})$ である．すなわち $R_z(\varphi)R_y(\theta)$ は z 軸座標ベクトル $\boldsymbol{z} = (0,\ 0,\ 1)$ を $\boldsymbol{k}$ に移す回転を表わす．
角速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\omega} = I(k)^{-1}L \tag{5}$$

となる．以上を，運動方程式 (3)，(4) に代入して，方程式

$$\dot{\boldsymbol{L}} = -mgl\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{z}, \tag{6}$$
$$\dot{\boldsymbol{k}} = (I(\boldsymbol{k})^{-1}\boldsymbol{L}) \times \boldsymbol{k} \tag{7}$$

を得る．

3.2 数値実験

重力加速度を $g = 9.8$ とする．コマの回転体は半径 a，厚さ h の円筒形で密度は ρ とする．コマの重心と支点との距離を l とする．コマの質量は m である．また，主軸モーメントは，

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{12}(3a^2 + h^2) + l^2m,\ I_3 = \frac{m}{2}a^2$$

である
才差運動の様子 (図 2)

コマの力学で回転速度が速いときの才差運動の角速度は

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{才差}} = \frac{mgl}{\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{\omega}_3}$$

である．

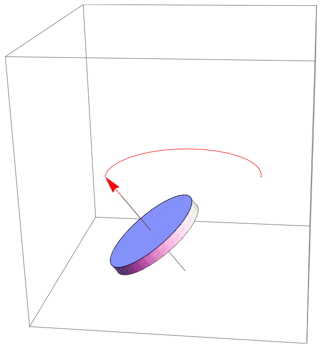

図 2 才差運動

3.3 章動のパターン

章動のパターンには 3 通りあると前章で記述したが今回の実験では (b) パターンしか見つけることができなかった．図 (3) 今後，残りの 2 パターンの章動を導きだすことが課題である．

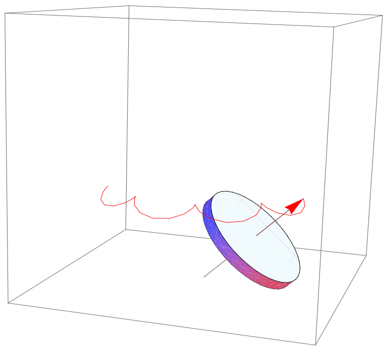

図 3 章動パターン 1

4 終わりに

本研究では，コマの運動を表す微分方程式を導出した．その微分方程式を数値的に解くことにより，Mathematica でプログラムを組みコンピュータ上にコマの運動を再現した．初期値によって周期的に才差運動を行うコマの動きを再現したり，ふらつきがありながらも周期的な運動を行うコマの動きを再現することができた．実験結果は，3 種類ある章動のパターンのうち，1 パターンしか見つけることができなかったが，残りの 2 パターンを探求することを考えると興味深い研究課題だと思われる．

参考文献

[1] 十河清・和達三樹・出口哲生 :『ゼロからの力学』．岩波書店，東京，2013.