加重サンプリング法 (要点抽出法) のオプション価格評価への応用について

2000MT075 大橋洋之
指導教員　石崎文雄

1 はじめに

本研究では、モンテカルロ法における分散減少法の一種である加重サンプリング法 (要点抽出法) に焦点をあて、その応用を研究する。特に、ヨーロピアン・コール・オプションの適正価格の推定に加重サンプリング法 (要点抽出法) を応用することを本研究では考える。

2 モンテカルロ法・加重サンプリング法

モンテカルロ法とは乱数を何度も繰り返し用いて実験を行い、多数回の実験結果から真の値を推定する方法である。モンテカルロ法は、柔軟なモデリングが可能で、計算アルゴリズムが明解かつ簡潔であるという利点がある。しかしながら、モンテカルロ法は、推定値の精度を高めるために多大な計算時間が必要であるという欠点がある。この欠点を解決するのための様々な分散減少法が研究されてきた。加重サンプリング法 (要点抽出法) とはこの分散減少法の一種であり、元の確率密度とは違う空間の確率密度を使い、少ないサンプルで分散の小さい推定値を出す方法である。

3 乱数

モンテカルロ法の問題点は推定値の精度を高めるために多大な計算時間を有する点である。この解決法の一つとして、良い乱数を用いることが挙げられる。乱数が良くないと偏りのある乱数が発生する。仮に、偏りのない乱数を用いたとしても、パスの発生個数が少ないと、偏りのある乱数系列を得る可能性がある。誤差を減少する様々な方法は、偏りのより少ない乱数系列の発生を目指す方法であるといえる。本論文では Park and Miller の最低基準乱数生成法と Bays-Durham の切り混ぜ安全機構を付けたものを使用する (以降最低基準乱数とする)[1]。

4 ヨーロピアン・コール・オプション

満期 T 年で行使価格 K 円のヨーロピアン・コール・オプションは T 年後の株価 $S(T)$ が K 円よりも高かったらオプション (権利) の買い手は　$S(T)-K$ 円を売り手から受け取ることができ、K 円より低かったら 0 円しか受けとることが出来ない契約である。つまり、コール・オプションの買い手は時刻 T に $\max[S(T)-K,0]$ の金額を受け取ることが出来る。よって、この契約を買っていれば株価が上がったときは利益を得る。一方、下がったとしてもオプションは、権利であって義務ではないため、自己判断により権利を行使せずに放棄することも可能であり、このことを利用して、危険損失を限定することができる。

5 シミュレーションの内容・手順

アウト・オブ・ザ・マネー[*1]のヨーロピアン・コール・オプションを考える。発生させた大半のパスは、$f(\xi_n)=0$ となり、多くのパスが無駄になる。よって、なるべく $S(T)>K$ となるように $S(T)$ を発生させてオプション評価を行い、パスの無駄を避け、誤差分散を減少させたい。そこで株価過程のドリフト r を $R>r$ に変換する次のような加重サンプリング法 (要点抽出法) を考え、以下のようなコール・オプション価格算出式 (以降式 (1) とする) を得る [2]。

$$\hat{c_{10}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e^{-rT}\max\left[y_iS_0-K,0\right]y_i^{\frac{(r-R)}{\sigma^2}}e^{\frac{(R^2-r^2)T}{2\sigma^2}}$$

式 (1) を使い、加重サンプリング法 (要点抽出法) とモンテカルロ法の推定値の分散及び実行時間を比較し、加重サンプリング法 (要点抽出法) の効率がどれだけ向上しているかを調べる。推定値は式 (1) から導き出される推定値を 10 回繰り返し、その平均の推定値と分散をとる。そして、算出された各 R での分散を比較し、分散が最小の R とその際の推定値及び分散を表示する (表 1)。設定値は行使価格 $K=100$、原資産価格 $S_0=90$、原資産価格の変動の平均値 $(\%)\sigma=30$、満期日 (日)$T=182$、サンプル数 $N=10,000$、ドリフト $r=0.1$、$R>r$ となる適当な値 R とする。表は、R が $R=r$ となる時モンテカルロ法での推定値、$R>r$ となる時加重サンプリング法 (要点抽出法) での推定値を表している。これは、$R=r$ の時、式 (1) の尤度比が 1 となり、

$$\hat{c_{10}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e^{-rT}\max\left[y_iS_0-K,0\right]$$

となる。つまり、N が大きければ大きいほど推定値は真の値に近くなるというモンテカルロ法の性質と同じになるからである。

次に、各 r の時、推定値の分散が最小となる R がどのような値をとる傾向があるのかを推測するため、ドリフトを $r=0.10$ から $r=0.95$ まで 0.05 づつ増加させ、各 r で R を r の値〜0.999 まで動かし、分散の動向を考察する。ドリフトとは原資産価格の動きの基本的な方向性を示すものであるということから、分散が R に反比例して減少するとは結論づけにくいと考えている (表 2)。

[*1] オプションが本源的価値を有してない状態

6　シミュレーション結果及び考察

表 1 から、1 行目の推定値の分散より、2 行目以降の推定値の分散が小さくなることがわかる。また、実行時間から、ほぼ同じ時間内に全て計算がされている。これらから、モンテカルロ法が加重サンプリング法 (要点抽出法) と同程度の推定値の分散を望む場合、より多くのサンプル数を発生させ計算を実行しなければならず、表 1 の計算時間を上回ることがわかる。つまり、加重サンプリング法 (要点抽出法) はモンテカルロ法の問題点、膨大な計算時間を短縮していると結論づけることができる。よって、加重サンプリング法 (要点抽出法) を使用することで、通常のモンテカルロ法に比べ、同程度の精度の推定値を得るための計算時間を短縮し、誤差分散を減少することが出来ると言える。

次に表 2 から、R が $MAX\_R(=0.999)$ と r の中間の値に約 $+0.2$〜-0.05 加えると分散が最小になることが多いことがわかる。また、表 1 から分散がドリフトに反比例して減少しているわけではないことがわかった。参考資料 [2] には

$$q(x;R)-p(x)max[xS_0-K,0]/c_{10}$$

が最小になるように R を決めた、と記してあるのだが、解析解 c をモンテカルロ法による解 c_{10} で代用するので、厳密な最適化はできないと考えられる。

	分散	平均	実行時間
R:0.100	0.011605436	6.425101	1.00s
R:0.101	0.006936305	6.439879	1.00s
R:0.106	0.003977940	6.480084	0.00s
R:0.126	0.003184529	6.488772	1.00s
R:0.144	0.001496343	6.451924	0.00s
R:0.211	0.001308327	6.449840	1.00s
R:0.275	0.001128557	6.453833	0.00s
R:0.277	0.000922262	6.467535	1.00s
R:0.352	0.000865230	6.440568	0.00s
R:0.396	0.000712340	6.461137	1.00s
R:0.446	0.000673395	6.441855	1.00s
R:0.453	0.000561027	6.439011	1.00s
R:0.485	0.000489596	6.452663	1.00s
R:0.498	0.000472942	6.445831	1.00s
R:0.527	0.000425959	6.443781	1.00s
R:0.569	0.000243930	6.430976	1.00s

表 1　$r=0.1$ の時の分散及び推定値

7　今後の課題

本研究で行ったシミュレーションは、モンテカルロ法・加重サンプリング法 (要点抽出法) ともボラティリティが一定と仮定している。これは現実的ではなく、実社会で利用する場合は、可変動に対応しているモデル、マルコフ連鎖モンテカルロ法でシミュレーションを行う必要がある。また、乱数について、線形合同法よりも長い周期の乱数を得る方法の一つ、メルセンヌ・ツイスター法 [2] でシミュレーションをし、周期を長くすれば良い結果が得られるのかといった点を調べることにも興味がある。さらに、発生させる乱数の種をどのような値に設定するのかといった点にも興味がある。これらのことからもわかるように、今後さらに改善の余地があると考える。

ドリフト	最適な R	中間値	R と中間値の差
r:0.100	R:0.569	0.599	-0.030
r:0.150	R:0.789	0.574	+0.215
r:0.200	R:0.817	0.599	+0.218
r:0.250	R:0.743	0.624	+0.119
r:0.300	R:0.697	0.649	+0.048
r:0.350	R:0.788	0.674	+0.114
r:0.400	R:0.790	0.699	+0.091
r:0.450	R:0.916	0.729	+0.187
r:0.500	R:0.699	0.749	-0.050
r:0.550	R:0.925	0.774	+0.151
r:0.600	R:0.981	0.799	+0.182
r:0.650	R:0.963	0.824	+0.139
r:0.700	R:0.977	0.849	+0.128
r:0.750	R:0.943	0.874	+0.069
r:0.800	R:0.974	0.899	+0.075
r:0.850	R:0.975	0.924	+0.051
r:0.900	R:0.976	0.949	+0.027
r:0.950	R:0.997	0.974	+0.023

表 2　r、R 以外の設定値は表 1 と同様

参考文献

[1] W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling: Numerical Recipes in C[日本語版], 技術評論社,pp.202-208 (1993).

[2] 湯前祥二・鈴木輝好：モンテカルロ法の金融工学への応用, 朝倉書店,pp.91-94 (6,10,2000).

[3] 三根久：モンテカルロ法・シミュレーション, コロナ社,pp.30-40 (5,10,1994).

[4] 木島正明・岩城秀樹：経済と金融工学の基礎数学, 朝倉書店,pp.132-136 (10,10,1999).

[5] 金融大学, `http://www.findai.com/kouza/4009 opt.html`.