Cramer-Lundbergの破産モデルについて

2001MT034 池江 貞治　　2001MT096 立川 康介
指導教員　尾崎 俊治

1　はじめに

確率モデルを利用した分析は，待ち行列理論，信頼性理論，金融工学などさまざまな分野で重要な役割を果たしている．今回は最も基本的なリスク評価モデルとして知られる Cramer-Lundberg モデルを取り上げ，そこでの破産確率が待ち行列モデルの待ち時間分布として評価できることを説明する．

2　保険会社におけるリスク

2.1　保険会社

保険会社は被保険者が将来起こるかもしれない危険に対し，予測される事故又は，病気，死亡等の発生の確率に見合った一定の保険料を加入者から徴収し，万一の事故等が発生した場合，被保険者が被る費用を支払う．ここで保険会社の破産となる要因として，事故等の発生率，被保険者から請求される請求額，被保険者から徴収する保険料があげられる．これらの要因は保険の対象によって大きく異なる．つまり保険の対象が病気又は死亡等の場合 (生命保険)，事故等の場合 (損害保険) に分かれる．

2.2　生命保険会社

生命保険の場合は支払金額が一定額に定められており，かつ人口が多いので死亡率は安定し，大数の法則が容易にはたらく．生命保険料の計算には，一国の国民全体を対象とした国民表と生命保険会社の統計をベースとした経験表に大別される．現在，日本の生命保険会社は経験表である生保標準死亡表を基本データとして使用している．そして，これらの生命表をもとに保険料が算出される．このように生命保険では，死亡率が安定しているため破産はその他の外的要因によるもので考えられる．

2.3　損害保険会社

一方損害保険の場合はそうはいかず，9.11 同時多発テロのような大事件はとうてい大数の法則の枠に収まらない．支払い金額においても損害保険の場合は定額ではなく，常に実際に発生した損害額である．そこで，損害保険会社は一社では機能しない大数の法則を広く再保険に出再することで補おうとする．損害保険業はロンドンにあるロイズを元締めとして，大数の法則を維持しようと努めている．しかし，科学の進歩により人類の活動領域が飛躍的に拡大し，かつては想像もできなかった巨大事故が頻発するようになったため，ロイズの収益は常に不安定である．よって今回は損害保険会社を対象にした破産モデルについて研究を行う．以下保険会社とは損害保険会社を指す．

3　Cramer-Lundberg モデル

3.1　準備金 R_n の式の定義

ここではある保険会社の準備金 R_nの時間的変化を表す次のようなモデルを考える．初期時点での準備金を x ，単位時間当たり保険料を a，初期時点以降の支払い請求発生間隔を D_1，D_2，$\cdots$，k 番目の支払い請求額を X_kとすると，

$$R_n = x + a\sum_{i=1}^{n} D_i - \sum_{i=1}^{n} X_i$$

と表せる．

3.2　Cramer-Lundberg の破産モデル

図 1 は，準備金の時間的変化を図示したものである．このことからわかるように，請求額がその時点での準備金を上回ると支払いができなくなるため，モデル上はこれを保険会社の破産と定める．破産時における準備金の時間的変化を以下の図 2 に示す．

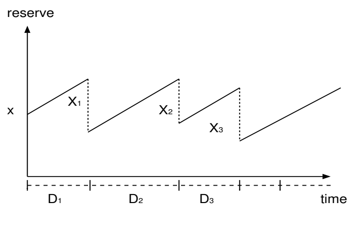

図 1　準備金の時間的変化 (1)

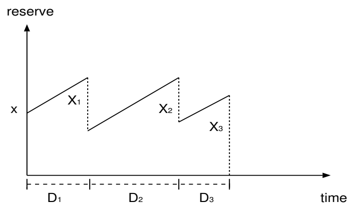

図 2　準備金の時間的変化 (2)

単位時間当たりの準備金の平均的な動きは，上向きに a，下向きに $\mathrm{E}(X_k)/\mathrm{E}(D_k)$ である．そのため $a \leq \mathrm{E}(X_k)/\mathrm{E}(D_k)$ の場合は，いつかは必ず破産してしまう．一方，$a > \mathrm{E}(X_k)/\mathrm{E}(D_k)$ の場合は平均的には準備金は増加にあるものの，大きな請求額が発生して倒産する可能性も残されている．したがって，以下では，$a > \mathrm{E}(X_k)/\mathrm{E}(D_k)$ の場合を考えることにする．まだ破産していない場合, k 回目の請求発生直前の準備金よりも k 回目請求額が大きければ破産することになる．ここで破産の時期は $R_n \leq 0,\ n \in \mathrm{N}$ の条件で $\tau_d(x) = \infty$ のとき，$\tau_d(x)$ はランダムに変化する．ここで,

$$\psi(x) = \mathrm{P}(\{R_1 < 0\} \cup \{R_2 < 0\} \cup \dots) = \mathrm{P}(\tau_d(x) < \infty)$$

とすれば，この場合，無限破産確率である．また $\psi(x)$ は様々な u によって成り立つ時，破産関数である．一方，$\psi(x;n) = \mathrm{P}(\tau_d(x) \leq n)$ の破産は n 回目の支払い請求より後ではないという有限破産確率になる．このように破産確率は有限範囲，無限範囲の二通りで考えることができる．しかし多くのケースでは $\psi(x;n)$ の有限破産確率で破産モデルを表すのは困難なため，数学的に容易な無限破産確率で表すことにする．$\psi(x)$ への近似は全般的なリスクモデルにもしばしば用いられるが，今回は無限破産確率を用いる．したがって，初期の準備金が x の場合，いつかは破産してしまう確率は,

$$\bar{B}(x) = \mathrm{P}\left(\max_{k \geq 1}\left\{\sum_{i=1}^{k}(X_i - aD_i)\right\} > x\right) \tag{1}$$

と表せる．式 (1) の破産確率を求めることがリスクモデルとしての目的であるが，これは待ち行列モデルの待ち時間分布として求めることができる．

4　待ち行列モデルとの関連性

次のような単一窓口の GI/GI/1 待ち行列モデルについて考える．空の待ち行列に 1 番目の客が到着する．それ以降の客の到着間隔を順に T_1，T_2，$\cdots$とし，最初の客も含めて k 番目に到着した客のサービス時間を S_kをする．到着した客は，先客がいなければすぐにサービスを開始し，待っている客がいる場合は後ろに並んでサービスが終るのを待つものとする．ここで，n 番目の客の待ち時間 W_nを漸化式で表すと,

$$W_n = \max\{0,\ W_{n-1} + (S_{n-1} - T_{n-1})\} \tag{2}$$

となる．これを再帰的に解くと,

$$W_n = \max\left\{0, \max_{1 \leq k \leq n-1}\left\{\sum_{i=k}^{n-1}(S_i - T_i)\right\}\right\} \tag{3}$$

が得られる．待ち行列モデルでは，平均的な意味での処理能力が到着するサービス要求量を上回っていれば安定的に稼働することが知られている．このモデルでは，$\mathrm{E}(T_k) > \mathrm{E}(S_k)$ が満たされていれば, 待ち時間の定常分布が存在する．具体的には，定常状態で待ち時間が x を超える裾確率 $\bar{W}(x)$ は,

$$\bar{W}(x) = \mathrm{P}\left(\max_{k \geq 1}\left\{\sum_{i=1}^{k}(S_i - T_i)\right\} > x\right) \tag{4}$$

と表せる．

4.1　Cramer-Lunderg モデルと待ち行列モデル

ここで，第三章の Cramer-Lunderg モデルと対応させると図 3 と図 4 である．Cramer-Lunderg モデルでは上向きに a 増加し，ある請求発生時点 D_k では準備金 x が X_k だけ減少する．一方，待ち行列モデルでは，システムの処理能力によって待ち時間 W が減少し，ある客の到着時点 T_k でシステム内での待ち時間がサービス時間 S_k だけ増加する．

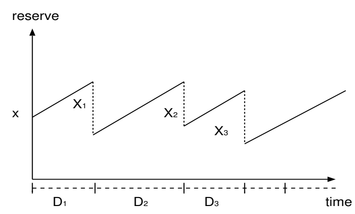

図 3　準備金の時間的変化 (1)

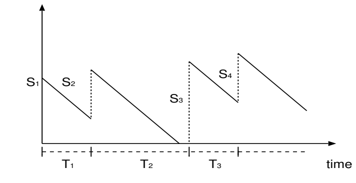

図 4　待ち時間の推移

式 (1) と式 (4) から破産確率における X_k, aD_kと待ち時間分布における S_k, T_kがそれぞれ対応することが分かる．

表 1：破産確率と待ち時間モデルの双対性

破産確率$\bar{B}(x)$		待ち時間分布 $\bar{W}(x)$
X_k	$\longleftrightarrow$	S_k
aD_k	$\longleftrightarrow$	T_k

4.2　破産確率の算出

実際に $\bar{B}(x)$ について求めてみる．待ち時間分布の関連性から待ち行列モデルにおいて到着時間間隔 T_k とサービス時間 S_k がともに指数分布に従う M/M/1 モデルについて考える．請求発生率が λ，パラメータ $a\mu$ とすると，

$$\bar{B}(x) = \frac{\lambda}{a\mu} e^{-(a\mu-\lambda)x} \tag{5}$$

となる．この式から以下の表 2 のような破産確率を算出した．

表 2：破産確率 $\bar{B}(x)$

初期準備金	破産確率	請求発生率	破産確率	保険料	破産確率
2000	0.05899231	10 %	0.00083465	14 %	0.22262352
4000	0.00402000	11 %	0.00347981	15 %	0.05899231
6000	0.00027394	12 %	0.01437089	16 %	0.01933387
8000	0.00001867	13 %	0.05899231	17 %	0.00694625
10000	0.00000127	14 %	0.23966470	18 %	0.00279287

5　待ち行列モデルとの関連性 2

5.1　準備金 R_n とシステム内での滞在時間 F_n との関連性

第 4 章では待ち行列モデルを，Cramer-Lundberg モデルに対応させることによって待ち行列における待ち時間の累積が x を超える確率を求めることによって破産確率を求めた．ここでは，Cramer-Lundberg モデルを待ち行列モデルに対応させることによる待ち行列モデルの破産時の地点に着目する．図 5 を見てみると k 番目のサービスが到着し，そのサービス時間が x を超えると破産となる．つまりシステム内での滞在時間が x を超えると破産となる．ここで，

$$F_n = W_n + S_n$$

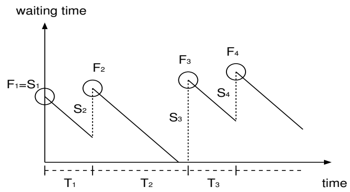

図 5　待ち時間の推移

とすると F_n はシステム内での滞在時間時間である．Cramer-Lundberg モデルの R_n を F_n に対応させると，

$$R_n = x + a\sum_{i=2}^{n} D_i - \sum_{i=1}^{n} X_i$$

である．また Cramer-Lundberg モデルの R_n を F_n を対応させたのが図 6 である．

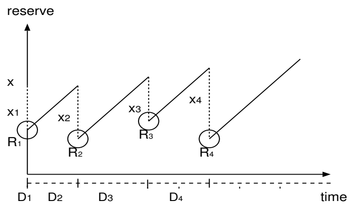

図 6　準備金の時間的変化

Cramer-Lundberg モデルを待ち行列モデルに対応させたため，一番目の請求間隔 $D_1 = 0$ である．次に，F_n が x を超える破産確率を算出する．

5.2　破産確率の算出

到着率を λ，パラメータ $a\mu$ の指数分布に従うとき破産確率 $\bar{C}(x)$ は，

$$\bar{C}(x) = e^{-(a\mu-\lambda)x} \tag{6}$$

となる．この式から次の表 3 のような破産確率を算出した．

表 3：破産確率 $\bar{C}(x)$

初期準備金	破産確率	請求発生率	破産確率	保険料	破産確率
2000	0.06814455	10 %	0.00125341	14 %	0.23930598
4000	0.00046438	11 %	0.00475044	15 %	0.06814455
6000	0.00031644	12 %	0.01798414	16 %	0.02379509
8000	0.00002156	13 %	0.06814455	17 %	0.00908269
10000	0.00000147	14 %	0.25840602	18 %	0.00386698

6 ソルベンシー・マージン

6.1 ソルベンシー・マージン比率

保険会社の「支払余力」を意味するソルベンシー・マージン比率という保険会社の経営の健全性を表す代表的な指標がある．ソルベンシー・マージンとは「支払余力」を意味し，万が一の場合，つまり，通常予想外の危険が発生した場合には「保険金の支払いに回せる財源」のことである．ソルベンシー・マージン比率とは保険会社が抱える様々な危険，つまり一般保険リスク，巨大損害リスク，予定利率リスク，資産運用リスク，経営管理リスクなどを金額化し，それに対してソルベンシー・マージンの総額が，どのくらいの比率になるかを示す数字のことをさす．ソルベンシー・マージン比率の求め方は以下のようになる．

$$\text{ソルベンシー・マージン比率} = \frac{\text{ソルベンシー・マージン}\times 100(\%)}{\text{各種リスク額の合計}\div 2}$$

その保険会社の保有するリスク額の二分の一を分母，支払余力 (ソルベンシー・マージン) 総額を分子とする．ここで各種のリスク額の合計を二分の一にするのは，リスクが同時に起きることはまずないという前提があるためである．よって 200% なら，リスク額と支払余力額が釣り合っていることになる．この値が 200% 以上なら，支払余力がリスク額より大きいので，一般的には「経営の健全性の一応の目安になる」と言われている．

- 両方が釣り合うと 200%
- 支払余力額の方が大きいと 200% 超
- リスク額の方が大きいと 200% 未満

通常予想外のリスクに対してソルベンシー・マージンが充てられるのに対して，通常予想内のリスクおいては責任準備金というかたちであらかじめ積み立ててある．

6.2 C-L ソルベンシー・マージン比率

ソルベンシー・マージン比率の算出方法を Cramer-Lundberg モデルに適応させることにする．Cramer-Lundberg モデルでの初期準備金が保険会社での責任準備金にあたる．つまり Cramer-Lundberg モデルに適応させたソルベンシー・マージン比率と通常のソルベンシー・マージン比率と異なる点は，通常予想できる範囲におけるソルベンシー・マージン比率 (以下 C-L ソルベンシー・マージン比率) である．またソルベンシー・マージン比率を算出する際の分母にあたるリスク額とは，保険会社の保有するリスク額の全額であるが，Cramer-Lundberg モデルでのリスクは一回の請求額であるため，平均のシステムで滞在する時間を，分子にあたる支払い余力は準備金を対応させる．よって C-L ソルベンシー・マージン比率は，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C-L}\ \text{ソルベンシー・マージン比率} \\
&= \frac{\text{準備金}}{\text{平均のシステムで滞在する時間}\div 2} \times 100(\%) \\
&= \frac{x}{\frac{1}{\mu(1-\rho)}\div 2} \times 100(\%)
\end{aligned}$$

となる．

7 おわりに

今回の研究では保険会社の初期準備金，請求発生率，保険料の要因による破産確率を待ち行列モデルの待ち時間分布を利用し求めた．まず，待ち行列モデルの待ち時間の累積を Cramer-Lundberg モデルの保険料と支払請求額との差の累積に対応させて求める方法，二つ目は，Cramer-Lundberg モデルの k 番目の準備金に $k+1$ 番目の保険料と支払請求額の差額を加えたものを，待ち行列モデルのシステム内で滞在する時間に対応させ，破産地点に着目した方法である．また，ソルベンシー・マージン比率を利用して (C-L ソルベンシー・マージン比率) を示すことができた．今後の課題としては支払請求間隔と支払請求額はともに指数分布に従うものとして算出したが，その他の分布の違いによる破産確率を算出できればよかった．しかし，今回の研究をきっかけに保険についての知識はもちろんのこと，保険を扱う保険会社を選ぶことも同時に学べたのではないかと思う．

参考文献

[1] 牧本直樹，「リスク評価と待ち行列モデル」，オペレーションズリサーチ, 2004 年 7 月号, pp.418-422.

[2] P. Embrechts, C. Kluppelberg and T. Mikosch, "Modelling Extremal Events", pp.22-57, Springer, New York, 2003.

[3] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels "Stochastic Processes for Insurance and Finance", pp.147-204, Wiley, New York, 1999.

[4] 尾崎俊治，「確率モデル入門」，朝倉書店，1996.

[5] 出口治明，「生命保険入門」，岩波書店，2004.