

CGによる河川形成のビジュアルシミュレーションに関する研究

2001MT040 伊藤 泰明

2003MT105 土屋 孝之

指導教員

2003MT021 堀田 健太郎

2003MT112 山口 耕世

金 知俊

1 はじめに

近年、コンピュータの性能の向上により様々な自然物のCGによる再現が可能になってきており、炎や煙のような流体のシミュレーションが多く研究されるようになってきている。従来、不定形な連続体である流体を扱うシミュレーションでは差分法が多く用いられてきた[4]。しかしコンピュータの発達により最近では流体を無数の粒子の集合として扱う粒子法を使った研究が様々な分野で広く行われるようになってきている[1]。コンピュータグラフィックスの分野でも多数の粒子の運動により炎や煙などの流体のシミュレーションを行い描画するパーティクルシステムが研究されている。一方、多くの自然物がCGにより再現されてきてはいるが水流による河川の流路形成に関する研究は数値解析の分野での報告がほとんどであり、CGによる再現を目指した研究は少ない。実際の河川は、長い年月をかけて土壌が浸食され形成されていくものでありその様子を観測することは難しい。そこで我々は粒子法を用いた水流による河川の流路形成をCGでシミュレーションする事を目指し、その為の手法を提案する。なお、今回は計算機の制限のため2次元でシミュレーションを行う。

2 流体(連続体)の計算手法

流体のシミュレーションを行う上で考えられる手法は大きく分けて二種類ある。ひとつは差分法や有限要素法などの空間分割を用いる方法であり、もうひとつは今回の研究で用いる粒子法である。以下、これらの手法について説明する。

2.1 空間分割法による手法

1. 差分法

空間分割を用いる解析の中で最も基本的な方法である。計算対象の構造を格子状に分割し、各々の要素内で成り立つ偏微分方程式を作成し、それを差分に置き換えて解き離散化する手法。変化が複雑になる箇所は格子分割を細かくして表現[4](図1)。

2. 有限要素法

対象の構造をメッシュ(領域を格子状で分割した際のひとつひとつの格子)で区切り、その中で成り立つ偏微分方程式を積分形にして離散化する手法[4]。

これらの手法には、計算方法や計算時間、表現能力という点においてそれぞれの違いはあるものの、空間を格子状に分割しそれぞれの格子内において偏微分方程式を解

き、その格子内の状態を解析するという空間分割の手法が用いられているという所で大きく共通している。

2.2 粒子法

連続体を有限個の粒子によって表し、連続体の挙動を粒子の運動によって計算する手法である(図2)。各粒子が速度や圧力といった変数を保持しながら移動するため格子生成を必要としないという特徴がある。粒子法には様々な手法があり、例えば、今回の研究で参考にした手法であるMPS(Moving Particle Semi-implicit)法がある。これは、勾配や発散という微分演算子に対応する粒子間相互作用モデルを用意し、これらを微分方程式中の微分演算子に適用することによって離散化する手法である。MPS法は、粒子法の中でも流体解析や構造解析に用いられている代表的な手法である。[1]

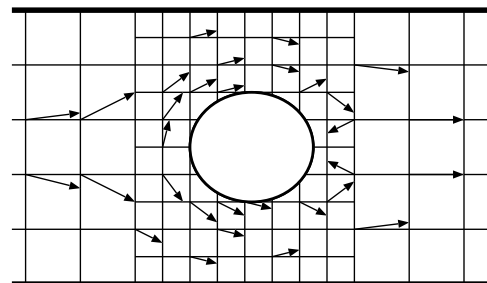


図1 差分法による水の流れ

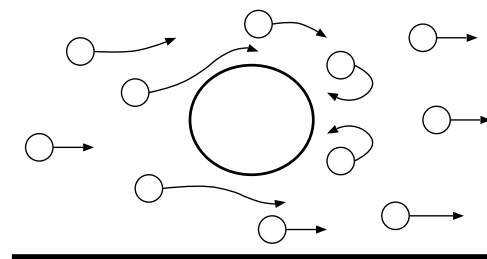


図2 粒子法による水の流れ

2.3 2つの手法の比較

空間分割による手法と粒子法には、以下のような違いがある。

● 格子生成の必要の有無

差分法などでは格子生成が不可欠であり、適切な格子を生成するには知識や経験を必要とする。一方、粒子法では部分的に格子を使用する手法もあ

るが、基本的に格子は必要としない。そのため、比較的差分法などよりも直感的に理解しやすい利点がある。

- 表現能力
差分法では対象が流体のみであり固定物の変化が扱いにくいのに対し、粒子法ではそれらを共に扱うことができる。今回の研究では水という流体と河床という固定物を扱うことを考えているので粒子法の方がより適していると考えられる。
- 連続体の挙動の記述
記述の仕方がラグランジュ法かオイラー法であるかという違いがある。固定された地点からの視点で連続体の動きを見るという考え方がオイラー法であり差分法などに該当する。しかし、連続体の支配方程式に対流項が生じ、計算にずれが生じたり複雑になるという欠点がある。これに対して、連続体の視点で位置の変化を見るという考え方がラグランジュ法であり粒子法に該当する。粒子の視点でみるため連続体の状態もそのまま移動していき、オイラー法で発生する問題が生じないという利点がある。

以上のことより、今回の研究では粒子法を用いることとし、MPS法を参考に新たな計算手法を考案した。既存の手法をそのまま用いなかった理由としては、本研究では物理的効果を考慮しつつも、CGによる再現を重視しているため物理的に厳密な計算を必要としないということと、またMPS法で計算処理を行うと複雑になり膨大な計算時間がかかることが予想されたからである。

3 水流の表現手法

水流を取り扱う場合、各粒子の運動、粒子同士の相互作用、粘性力を考慮する必要がある。

3.1 粒子の挙動

本研究では、粒子は単純なニュートンの運動方程式に従うものとする。このとき、粒子の運動方程式は以下の式で表される。

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} = \mathbf{a} \quad (1)$$

ここで t は時刻、 \mathbf{y} は粒子の位置ベクトル、 \mathbf{a} は粒子の加速度ベクトルである。なお加速度ベクトルとしては重力加速度を与える。また粒子の速度ベクトルを \mathbf{v} とすると、

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{v} \quad (2)$$

となり、式(1)(2)から以下の式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} \end{cases} \quad (3)$$

これは一階連立微分方程式であり、容易に数値積分をすることができる。

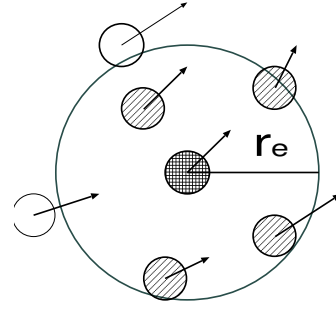


図3 粒子間相互作用

代表的な常微分方程式の解法としてオイラー法とルンゲ=クッタ法がある。オイラー法は数学的に理解しやすく、計算も簡単であるが、丸め誤差等が蓄積しやすいなど精度に問題があり計算が破綻しやすい。しかし今回は後述する粒子間相互作用による修正を行い、誤差を無視できる範囲に抑えることができるので、ルンゲ=クッタ法より計算時間の少ないオイラー法を用いる。

3.2 粒子間相互作用

今回は相互作用を粒子間距離に反比例するような反発力が働くものとして考える。

粒子間相互作用モデルには重み関数 ω を導入する。またここで用いる重み関数 ω はMPS法と同様のものを利用する [1]。

$$\omega(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & 0 \leq r < r_e \\ 0 & r_e \leq r \end{cases} \quad (4)$$

ここで r は粒子間距離である。式(4)の重み関数を用いると、粒子間距離 r がパラメータ r_e より短い場合のみ相互作用をすることになる(図3)。本来ならば r_e は無限遠として考えるべきだが、そうすると粒子法では粒子数が非常に多いため計算時間が膨大になり、現実的でない。またある程度離れた距離での反発力は非常に小さいため、今回は r_e を有限として反発力を近似する。 $r=0$ で ω は無限大になるが、これによって二個の粒子が互いに接近する場合に、完全に重なり合う前に必ず反発力が働く。これは粒子のすれ違いやむらを防ぐ効果がある。

次に粒子間相互作用モデルを以下の式で与える。

$$\mathbf{v}^* = \sum_{i \neq j} \omega(|r_j - r_i|) N_{ji} \quad (5)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \quad (6)$$

近傍粒子 j から基準とする粒子 i に向かう単位ベクトルを N_{ji} としたとき、近傍粒子 j から受ける反発力による速度修正ベクトル \mathbf{v}^* を式(5)によって求め、新しい時刻における粒子の速度ベクトル \mathbf{v}' を式(6)によって求める。また二つの粒子 ij が互いに作用する \mathbf{v}^* の関係は以下の式で表すことができる。

$$\mathbf{v}_i^* + \mathbf{v}_j^* = 0 \quad (7)$$

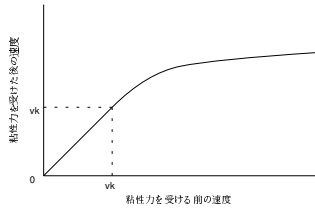


図4 粘性力による水粒子の速度変化

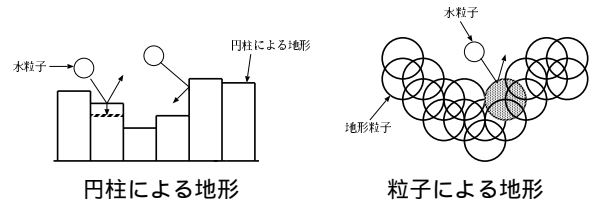


図5 地形の表現手法

相互作用する上での運動量の変化は、

$$mv_i + mv_j = mv'_i + mv'_j \quad (8)$$

となり、各粒子の質量 m は等しいので式(6)(7)(8)より運動量保存則が成り立っていることがわかる。

3.3 粘性計算

水粒子の運動の安定化をはかるために粘性力を導入する。粘性力の影響を受けた水粒子の速度 v'' は以下の式によって与える。

$$|v''| = \begin{cases} |v'| & (v' \leq v_K) \\ v_K + \log(|v'| - v_K + 1) & (v' > v_K) \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 v_K は粘性力を受け始める速度である。この式(9)によって水粒子は、 v' が v_K 以下のときは通常通り加速し、 v_K より大きくなったときに粘性力を受けるようになる(図4)。

4 地形の表現手法

土砂の粒径は比較的大きい $0.1 \sim 0.2\text{mm}$ 以上とし、移動した土砂は消失という形で表現する。また表現手法として円柱を用いる手法と粒子を用いる手法を提案する。

4.1 円柱による表現

複数の円柱を並べることで地形を表現する。円柱の頂点への粒子の衝突によって円柱が削れていき、それにより浸食による流路の変化を表す(図5)。これは大幅に簡略化したモデルであり、計算時間を短縮でき、実装しやすいという利点がある。しかし、このモデルで扱えるのは円柱の上部からの圧力のみで、それ以外の方向から圧力を受けた場合の地形側面のえぐれを表現できない。

4.2 粒子による表現

多くの粒子を配置することで地形を表現する。配置した地形粒子に水粒子が衝突することで地形粒子が消滅し、それによって浸食を表現する。また、地形粒子を重ねて配置することで水粒子の地形へのすりぬけを防止する(図5)。この手法は円柱による地形表現に比べ、勾配がなだらかで自然になる。さらに横方向への浸食も表現することが可能である。計算機の負荷は大きくなるが、表現能力の高さからこの粒子による地形表現を選択することとした。

4.3 地形粒子処理

地形を粒子で表現することによる計算時間の増大を改善することを考える。水流の粒子との衝突を考慮するの

は地表のみとなるため、配置する粒子を地表のみにする。このことによって衝突判定や描画にかかる計算負荷を削減することができる。しかし地形粒子を地表面のみにしか配置しないので、消滅した粒子の代わりに粒子を地形に切れ目が生じないように再配置していく必要がある。これを実現するためには粒子を再配置する位置を判定しなければならない。まず、地形全体を碁盤目状に区切り、それぞれのマス目で地表を判定する。次に、ある粒子に浸食が起こったときその粒子に対応するマス目の周囲を調べ、粒子がなく地表でないマス目がある場合は新たな粒子を配置する(図6)。

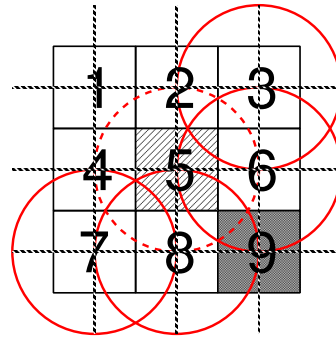


図6 地形粒子処理

5 水流による流路形成

水流となる粒子が土砂に影響を与えることにより、流路が形成または変化していく。この条件を本研究では浸食条件と呼び、実際の数値モデルを参考にし簡略にしたものを用いた。また影響を与えた粒子のその後の運動を以下に示す。

5.1 浸食条件

河床の浸食は流れ方向への力の釣り合い、または、流れと直行する水深方向への力の釣り合いのどちらかが崩れたときに発生する [9]。以下にそれぞれの条件を示す。

5.1.1 流れ方向への力の釣り合い

流水が土砂に及ぼす流体力 F_D 、土砂粒子に作用する重力から浮力を差し引いた力の流下方向成分 F_{G_x} 、移動しようとする土砂粒子と河床を構成する粒子との間の摩擦力 F_μ の釣り合いを考える。このとき、それぞれの力の

関係式は以下ようになる。

$$F_D + F_{G_x} - F_\mu \leq 0 \quad (10)$$

式 (10) が満たされなくなると土砂は移動を開始する。

5.1.2 流れと直行する水深方向への力の釣り合い

揚力 F_L 、重力から浮力を差し引いた力の水深方向成分 F_{G_z} の釣り合いを考えると力の関係式は以下ようになる。

$$F_L + F_{G_z} \leq 0 \quad (11)$$

式 (11) が満たされなくなると土砂は移動を開始する。

以上の 2 つの関係式のうち、どちらかの条件が成立すれば、土砂移動が開始される。一般的に、粒径 D が $0.1\sim 0.2\text{mm}$ より大きいときは前者が、小さいときは後者の関係式が適用される。今回は比較的粒径が大きい土砂を想定し、前者の関係式を適用する。

5.2 衝突判定

以下のステップにより水粒子と土砂との衝突を判定する。

ステップ 1 水粒子の中心座標の軌跡と地形粒子との最短距離を計算する

ステップ 2 最短距離と各粒子の半径の和を比較する

ステップ 3 (最短距離) > (半径の和) ならば衝突しない
ステップ 1 へ

ステップ 4 (最短距離) ≤ (半径の和) ならば衝突時刻を計算する

ステップ 5 衝突時刻と単位時間を比較する

ステップ 6 (衝突時刻) ≥ (単位時間) ならば衝突しない
ステップ 1 へ

ステップ 7 (衝突時刻) < (単位時間) ならば衝突する

6 シミュレーション結果

考案した手法を元に、シミュレートを行った結果を図 7 に示す。ここで示す地形は幅 2m の流路の断面であり、水粒子は画面奥から手前に流れている状態である。また地質は砂浜などの摩擦係数の低い砂のみとした。なお想定している土砂粒子は $0.1\sim 0.2\text{mm}$ より大きいものであるが、ここで用いた地形粒子は複数の土砂粒子の集合であり、土砂粒子 1 粒に対応するものではない。STEP が進むにつれて、土砂が浸食され流路が変化していく。浸食された河床により多くの水流が流れていき、より深く浸食されていく様子がわかる。水流は粒子間相互作用と粘性によりむらを防いでいることが確認でき、また地形の表現に粒子を用いることにより、側面への浸食も表現することができた (図 7(2)~(4))。これは現実の河川に近い浸食の進行であると考えられる。

7 おわりに

本研究では、河川形成・水流による流路の変化を CG により再現する事を目指し、粒子法を基に独自の計算手法を作成した。水流や地形の表現には粒子を用い、浸食の

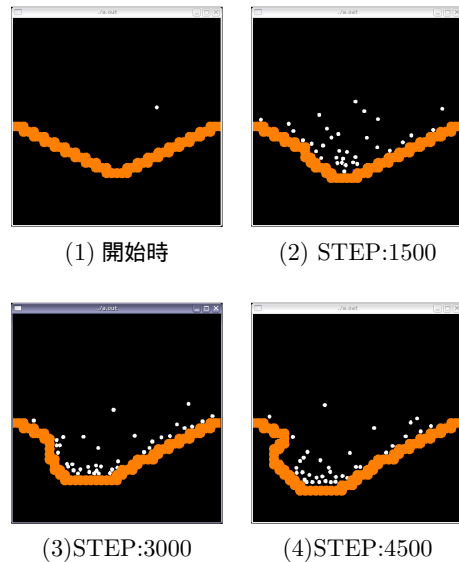


図 7 シミュレーション結果

条件は現実の数値モデルを参考に手法を考案した。考案した手法をもとに CG によるシミュレーションを行った結果、浸食による流路の変化を確認することができ、また現実の河川に近い浸食の様子を再現できた。しかし、現実の河川では削れた土砂が流路に堆積するなどより複雑な現象が起こる。そのために流路が変化していく場合も考慮していく必要がある。以上を踏まえた上で今後の課題として以下の事が挙げられる。

- 削れた土砂粒子の流路への堆積
- 土砂粒子同士が影響を与える地形への浸食
- 三次元化によるビジュアル面の改善
- 三次元化による計算時間増大の改善

参考文献

- [1] 越塚誠一：日本計算工学会：粒子法，丸善 (2005)。
- [2] 越塚誠一：粒子法による流れの数値解析，流れと粒子 (2002)。
- [3] 泉典洋：河道網の形成，ながれ 第 24 巻 第 1 号，5-14 (2005)。
- [4] 河村哲也：流れのシミュレーションの基礎[!]，山海堂 (2002)。
- [5] 河村哲也：流れのシミュレーションの応用[!]，山海堂 (2005)。
- [6] 河村哲也：河川のシミュレーション[!]，山海堂 (2004)。
- [7] 河村哲也：数値計算の初歩[!]，山海堂 (2002)。
- [8] 河村哲也：基礎からの流体力学[!]，山海堂 (2006)。
- [9] 関根 正人：移動床流れの水理学，共立出版 (2005)。
- [10] Eric Lengyel (著) 狩野智英 (翻訳)：ゲームプログラミングのための 3D グラフィックス数学，ポーンデジタル。