

# サブドミナント・ウルトラ距離に基づいた ポートフォリオ分類に関する研究

2007MI167 成田 和人      2007MI210 柴 友規

指導教員 石崎 文雄

## 1 はじめに

ポートフォリオ (portfolio) とは、「複数の種類で構成される組み合わせ」のことである。株式や債券などの証券投資を行うとき、ポートフォリオを組んで複数の証券に分散投資を行うことが多い。その理由は、ポートフォリオを組むと多くの場合、収益率のリスクを分散させる (減少させる)、あるいは、定められた収益率のもとでの合理的なリスクを抑えることが出来ると考えられているからである。そのため、ポートフォリオ選択問題が盛んに研究されてきた。ポートフォリオ選択問題とは、複数の投資対象の中から投資家にとって最も好ましいように、どの投資対象にどれだけ投資をしたらよいかを決定する問題である。ポートフォリオ選択問題において、最も標準的なポートフォリオ選択モデルは Markowitz の平均分散モデルである [4, 5, 2]。この平均分散モデルは、ポートフォリオの期待収益率が要求期待収益率以上のもとで、ポートフォリオの収益率のリスク (分散) を最小化する数理論計問題として定式化される。

2008 年 9 月にアメリカ最大手投資銀行であるリーマン・ブラザーズがサブプライムローン問題により破産、これをきっかけにアメリカ経済に不安が広がり、世界的な金融危機へと連鎖した。日経平均株価は大暴落を起こし、2008 年 10 月には 6000 円台まで下落した。リーマンショックから 2 年ほどたつが未だに経済は不況であり、企業、個人の所有する株式ポートフォリオは大きな打撃を受けている。このような背景の中、ポートフォリオのリスク管理が再び大きな関心事となっている。そのため、金融工学で従来標準的に使用されてきたモデルの妥当性への疑念が再燃し、リスク管理に適した新しいモデルと解析手法が注目を集めている [1, 3, 6]。

本研究は、特に東証一部上場企業の株価のダイナミクスに着目し、東証一部上場企業から構成されるポートフォリオに対する適切なリスク管理のための基礎となる解析結果を与えることを目的とする。その目的のために、ウルトラ距離に基づいた階層樹形図 [3] による東証一部上場企業の分類を実証的に研究する。そのために、まず日経平均構成銘柄の株式銘柄  $i, j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) の収益率の間の相関係数  $\rho_{i,j}$  を調べる。この相関係数をもとに、銘柄間のユークリッド距離となる  $d_{i,j}$  を導く。

ここで、銘柄間の階層化を適切に行うために、 $n$  個の銘柄からなる位相空間は、ウルトラ距離空間になるという仮説を採用する。ウルトラ距離空間は、ユークリッド距離が満たす三角不等式よりも強いウルトラ距離不等式を満たすウルトラ距離が導入された距離空間である。ウルトラ距離空間という概念は、階層の概念と直接関係してい

るので、複雑系の階層構造を表すのに自然な方法と考えられている。

例えば、これら複雑系の階層構造は、スピン・ガラス、無秩序飽和系で観察される。ユークリッド距離  $d_{i,j}$  から導かれるウルトラ距離の中で、サブドミナント・ウルトラ距離と言われるウルトラ距離は、単純で有益な性質を持っていることが知られている。 $n$  個の対象から成る距離空間があると、サブドミナント・ウルトラ距離は  $n$  個の対象を結ぶ最小樹形 (minimal-spanning tree, MST) から得られる。このようにして得られたサブドミナント・ウルトラ距離は、一つに定められた順序を持つ階層を作り、そこに矛盾のない位相構造をもたらす。これにより、東証一部上場企業の階層樹形図を作成し東証一部上場企業の分類を考える。

今回取り扱う株式は、東証一部上場企業の株価検索ランキング (総合) 上位 30 位までの 30 銘柄とする。分析期間はリーマンショックの起こる二年前の 2006 年から 2009 年までとし、あくまで長期的な株価の観測を目的とする。本研究は投資家のリスク軽減を目的とし、利益増大や株価の未来予測をするものではない。

## 2 株価の相関と反相関

金融市場で取引されている二つの株価ダイナミクスに於いては、多数の連動性が観測でき、相関、反相関の関係性がある。市場では多数の銘柄の株が同時に取引されている。二つの株価が同時に時間発展する際それらの類似性と差異を明らかにする一つの方法として、二つの銘柄  $i, j$  の日毎の対数価格変動に関する相関係数  $\rho_{i,j}$  を導入することである。銘柄  $i$  に対して、時刻  $k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) での株価を  $Y_{i,k}$  で表すものとする。その時刻  $k$  での対数収益率を  $S_{i,k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) で表すと

$$S_{i,k} \equiv \log Y_{i,k} - \log Y_{i,k-1} \quad (1)$$

である。このとき、銘柄  $i, j$  の間の対数収益率の相関係数  $\rho_{i,j}$  は

$$\rho_{i,j} = \frac{\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle}{\sqrt{\langle S_i^2 - \langle S_i \rangle^2 \rangle \langle S_j^2 - \langle S_j \rangle^2 \rangle}} \quad (2)$$

で与えられる。ここで  $\langle \dots \rangle$  は、分析対象にしている取引日全てにわたる時間平均を表す。相関係数の取り得る値は、 $-1$  から  $1$  までで、特別な値として

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{完全 (正の) 相関} \\ 0 & \text{無相関} \\ -1 & \text{完全反 (負の) 相関} \end{cases} \quad (3)$$

をとる。本研究では東証一部におけるデータを検討する。  
(i) 東証一部上場企業を算出する株価検索ランキング (総合) 上位 30 位までの 30 銘柄

東証一部上場 30 銘柄は次の通りである。

みずほ FG・トヨタ自動車・三菱東京 UFJ・パナソニック・日本電産・日立製作所・東芝・セブン&アイ HD・東京電力・住友信託銀行・ソニー・三洋電機・武田薬品・大和証券・三菱商事・住友不動産・三菱地所・タカラバイオ・新日本製鐵・東京製鐵・ソフトバンク・ヤフー・ローソン・イオン・伊藤忠商事・ANA・王子製紙・日清 HD・昭和シェル・日産自動車

東証一部上場企業上位 30 銘柄にたいして、 $(30 \times 29)/2 = 435$  個の  $\rho_{i,j}$  が考えられる。各  $\rho_{i,j}$  は分析対象としている期間 (2006 年から 2009 年) で考える。

表 1 東証一部 30 銘柄の相関係数  $\rho_{i,j}$  の最大値, 最小値

| 西暦     | 最小値    | 最大値   |
|--------|--------|-------|
| 2006 年 | -0.833 | 0.935 |
| 2007 年 | -0.905 | 0.916 |
| 2008 年 | -0.724 | 0.952 |
| 2009 年 | -0.788 | 0.888 |

表 1 には、これら  $\rho_{i,j}$  の最大値と最小値を示した。表 1 より明らかなことは、 $\rho_{i,j}$  の最大値は 4 年間すべて 0.9 以上か、もしくは 0.9 に近い値をとっている。従ってかなり正に相関した二つの銘柄が存在することがわかる。また、最小値に関しては -1 に近く、従って完全に負に相関する度合いは大きい。

$\rho_{i,j}$  の最大の値は、2008 年に観測された 0.952 であり、それは伊藤忠商事と東芝との間のものであった。この両株はおどろくほど連動している。また、 $\rho_{i,j}$  の最小の値は、2007 年に観測された -0.905 であり、それは ANA と武田薬品との間のものであった。このことからグラフの連動性は酷似していない。

### 3 ポートフォリオの分類学

#### 3.1 銘柄間距離

時間変動している二つの銘柄に距離を定義する。そのために、銘柄  $i$  に関連する統計量である  $\tilde{S}_{i,k}$  ( $i = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$ ) を以下のように定義する。

$$\tilde{S}_{i,k} \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{S_{i,k} - \langle S_i \rangle}{\sqrt{\langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2}} \quad (4)$$

ここで  $S_{i,k}$  は銘柄  $i$  の時刻  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) における対数収益率である。この  $\tilde{S}_{i,k}$  を  $m$  次元ベクトル  $\tilde{S}_i$  の  $k$  番目の成分と考える。このとき、ベクトル  $\tilde{S}_i$  と  $\tilde{S}_j$  のユークリッド距離  $d_{ij}$  を次のピタゴラスの関係式

$$d_{ij}^2 = \|\tilde{S}_i - \tilde{S}_j\|^2 = \sum_{k=1}^m (\tilde{S}_{i,k} - \tilde{S}_{j,k})^2 \quad (5)$$

で与える。このとき、 $d_{ij}$  は前節で導入した相関係数  $\rho_{i,j}$  を使って、以下のように表現できることが知られている。

$$d_{ij} = \sqrt{2(1 - \rho_{i,j})} \quad (6)$$

また、このようにして定められた  $d_{ij}$  は、ユークリッド距離となっており、ユークリッド距離の満たすべき以下の 3 つの性質を満たすことが知られている。

- (i)  $d_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$
- (ii)  $d_{ij} = d_{ji}$  (7)
- (iii)  $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$

#### 3.2 ウルトラ距離空間

$n = 6$  の銘柄：みずほ FG, トヨタ自動車, 三菱東京 UFJ, パナソニック, 日本電産, 日立製作所からなるポートフォリオという特殊な例を考える。2009 年に於ける  $\rho_{ij}$  から距離行列  $d_{ij}$  を計算する。6 銘柄は 2010 年 7 月 25 日付けの株価検索ランキング (総合) 上位 6 銘柄でかつ、5 年分の株価データが存在する銘柄である。

表 2 2009 年上位 6 銘柄の距離行列  $d_{ij}$

|     | みずほ   | トヨタ   | UFJ   | パナ    | 日電    | 日立 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| みずほ | 0     |       |       |       |       |    |
| トヨタ | 1.382 | 0     |       |       |       |    |
| UFJ | 0.779 | 0.937 | 0     |       |       |    |
| パナ  | 1.243 | 0.440 | 0.818 | 0     |       |    |
| 日電  | 1.451 | 1.414 | 1.446 | 1.438 | 0     |    |
| 日立  | 1.440 | 1.411 | 1.441 | 1.428 | 1.417 | 0  |

$n$  個の銘柄からなる位相空間は、ウルトラ距離空間になるという作業仮説を採用する。ウルトラ距離空間とは、その空間内の対象の距離が、ウルトラ距離で計られるような空間である。ウルトラ距離  $\hat{d}_{ij}$  はユークリッド距離が満たす最初の二つの性質 (i)  $\hat{d}_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$  と (ii)  $\hat{d}_{ij} = \hat{d}_{ji}$  を満たすが、通常満たすべき三角不等式 (iii) の代わりにそれよりも強いウルトラ距離不等式

$$\hat{d}_{ij} \leq \max(\hat{d}_{ik}, \hat{d}_{kj}) \quad (8)$$

を満たす。ユークリッド距離  $d_{ij}$  から導かれるウルトラ距離の中で、ある一つのウルトラ距離は、その単純さと驚くべき性質をもっている。それは、サブドミナント・ウルトラ距離といわれ、 $n$  個の対象からなる距離行列があると、サブドミナント・ウルトラ距離は  $n$  個の対象を結ぶ最小樹形 (mininal-spanning tree, MST) から得ることができる。

2006 年から 2009 年までの間の 6 銘柄から得られた MST を図 1, 図 2, 図 3, 図 4, 階層樹形を図 5 に示す。

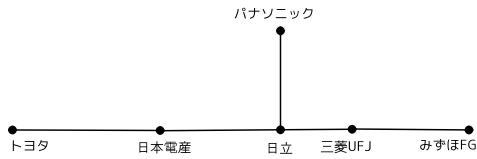


図1 2006年6銘柄のMST

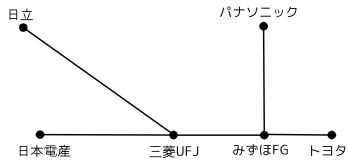


図2 2007年6銘柄のMST

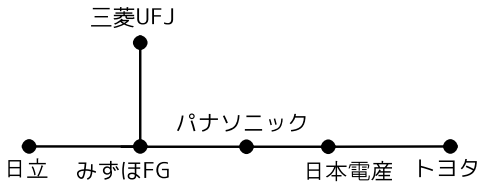


図3 2008年6銘柄のMST

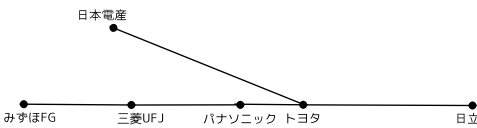


図4 2009年6銘柄のMST

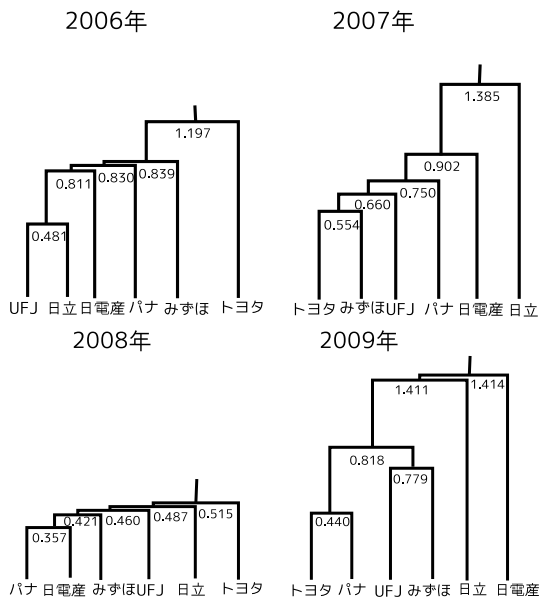


図5 4年間階層樹形

図1, 図2, 図3, 図4と図5から6銘柄の連動性とユークリッド距離を考察することができる。2008年は6銘柄間のユークリッド距離が最大でもトヨタ自動車と日立製作所の0.515であった。この結果より2008年においては相関性は非常に高い年だったと言える。

また三菱東京UFJとみずほFGのユークリッド距離は年ごとに異なるが、毎年隣接していることが分かる。特に考察しやすいのが2009年のポートフォリオが二つのグループに分かれている。一つめは対消費者金融企業(みずほFG・三菱東京UFJ), もう一つは対消費者サービス業、製造業(パナソニック・トヨタ自動車)に分かれている。以上より階層樹形は時間変化するが、基本構造はほとんど維持することが言える。図5の階層樹形は6銘柄に於ける結果であるが、30銘柄の株価データで階層樹形とMSTを作成する。2009年の30銘柄のMSTを図6、階層樹形を図7に作成し表示する。なお、予稿にはページ数の関係上掲載できないが、2006年から2009年までの30銘柄のMST、階層樹形をもとに考察、研究結果を述べる。

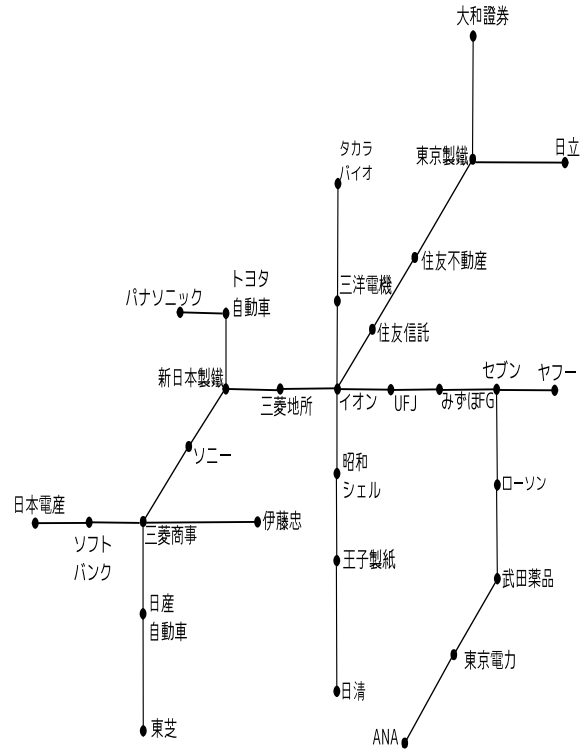


図6 2009年30銘柄のMST

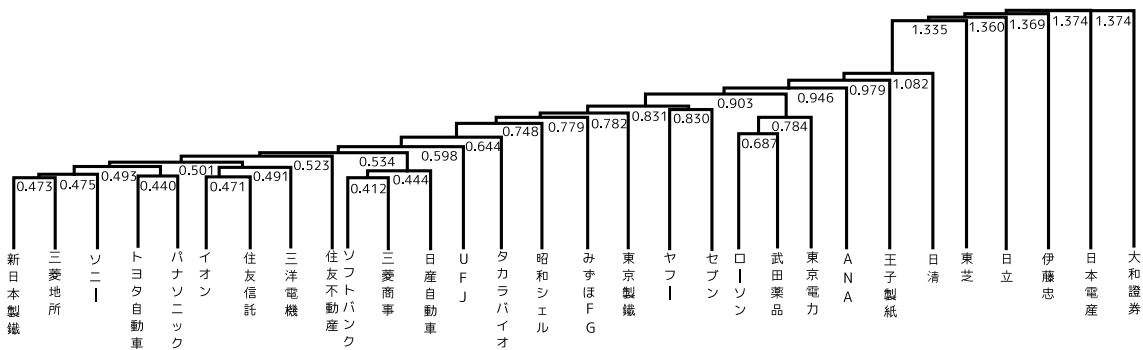


図7 2009年30銘柄の階層樹形

#### 4 研究結果

本研究は、企業の株式の相関性を考察し、2銘柄の相関性を求め、銘柄間の距離を考察する。30銘柄の運動性において2008年は他の年とは異なった結果になった。ユークリッド距離も0.6以下が非常に多く、このことから2008年は銘柄間の運動性が強い年だったといえる。なぜ2008年だけ非常に運動性が強く、銘柄間のユークリッド距離が小さかったかという2008年に起こったリーマンショックが深く関係していると考察する。リーマンショックが起こったことにより急激な株安と円高によって日本企業の収益にブレーキをかけ、金融機関への影響があった。9月にリーマンショックが起り日経平均株価が予想以上に下落し、銀行の含み益は大きく減少し、信用コストに当てる原資が枯渇、経営圧迫により融資を絞りこんだ。そして企業に対する貸し渋りにより倒産、地場企業の挫折などのいわゆる負の連鎖となったと考える。このことからみずほFGといった金融銘柄がMSTを見ると枝わかれの中心に位置していることで考察することができる。リーマンショックはそう毎年起こるものではなく、稀な一例である。

過去4年間の銘柄間の運動性とユークリッド距離から考察すると、毎年ユークリッド距離の値などは様々であるが毎年銘柄同士が隣接している銘柄があることが本研究により分かった。グループ会社(三菱東京UFJ・三菱商事・三菱地所)(住友信託銀行・住友不動産)は銘柄間の距離は様々ではあるもののMST表示をすると隣接、もしくは近い距離間に属していることが分かる。また、グループ銘柄ではないが武田製薬と東京電力、セブン&アイHDとローソン、日清HDと王子製紙と昭和シェルが隣接する確率が高いことが分かった。リスク軽減を可能にするためにはこれらの銘柄へ共に投資することはリスク増大を意味し、投資家は運動性の低く、銘柄間の距離も大きな値を取り得る銘柄同士に分配投資することによりリスク軽減が可能であると考えられる。すなわち他のグループに属したものの同士の銘柄を選択することによって、リスクを軽減させることができると考えられる。本研究は投資家のリスク軽減を目的としており、利益増大や未来

予測をするものではない。また、ANAやローソン、日清HDなどの企業は比較的グループに属していないので、これらの企業の銘柄に分散投資することによってリスクを低減させることができると考えられる。

#### 5 おわりに

本研究では、東証一部上場企業30銘柄の株価のダイナミクスに着目し、サブドミナント・ウルトラ距離に基づいた30銘柄の階層樹形図を作成し、30銘柄の分類を考えた。分析期間はリーマンショックの起こる2年前の2006年から2009年までを分析した。本研究よりその年によって相関性はさまざまではあるものの、サブドミナント・ウルトラ距離において特定の企業は隣接または同じグループに属しているということが一貫して言える。

また、今回は2006年から2009年の4年間の30銘柄で研究したが、より多くの銘柄と長期的な期間(10年程)のデータからサブドミナント・ウルトラ距離を算出することにより、より細かく正確なデータが観測できると考察する。また、他の分析方法(ユークリッド距離のみ)で銘柄間を算出し、今回のウルトラ距離の分析結果と比較するとより良い分析結果が算出できると考える。

#### 参考文献

- [1] J.-P. Bouchaud, M. Potter 著, 森平爽一郎監修, 森谷博之, 熊谷善彰訳, 金融リスクの理論-経済物理からのアプローチ-, 朝倉書店, 2003.
- [2] D. G. Luenberger 著, 今野浩, 鈴木賢一, 枇々木規雄共訳, 金融工学入門, 日本経済新聞社, 2002.
- [3] R. N. Mantegna, H. E. Stanley 著, 中島眞澄訳, 経済物理学入門-ファイナンスにおける相関と複雑性-, エコノミスト社, 2000.
- [4] H. M. Markowitz, Portfolio selection: Efficient diversification of investments, second edition, Basil Blackwell, 1991.
- [5] 枇々木規雄, 田辺隆人, ポートフォリオ最適化と数理計画法, 朝倉書店, 2005.
- [6] 宮原孝夫, 株価モデルとレヴィ過程, 朝倉書店, 2003.