通勤交通と内々交通に関する高層ビルの有効容積最適化問題

M2004MM020 岩田 美弘

指導教員　伏見 正則

1　はじめに

最近ニュースなどで名古屋の活性化が伝えられているが，このように地価が上がってきた名古屋において新たに高層ビルを建てようとすると，莫大な投資が必要になる．ならばより高く建築すればするほど，有効な面積を増やせ，投資を抑えられるのではないだろうか．しかしそれは効果的でないという研究をしている田口の文献を見つけ，非常に強い興味を持った．

ビル内の移動にはエレベータなどの通路が必須であり，人の交通が頻繁になるにつれ，その面積は十分に広く確保しなければならない．しかし、これは設計者が求める人をより多く収容するということと矛盾してしまう．本研究では [2] を参考にして，高層ビルの高さを変化させた際に，どれだけそういった有効な面積や容積が変化していくのかを考えていきたい．

2　通勤交通モデル

まず，各人がビルの入り口から中に入り，エレベーターを使ってそれぞれの階へ向かうときの交通を想定する．このときのエレベータの通路の面積を求めるモデルは [1] によって紹介されているので．それを基に説明していく．まず図 1 のようなビルを考える．このとき

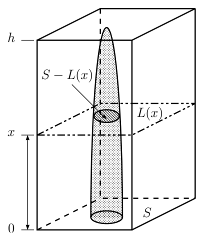

図 1　簡略化したビルの図

h：ビル全体の高さ
x：地上から測ったある場所の高さ
S：各階の建築面積
$L(x)$：有効床面積
ρ：単位容積あたりの人口
T：出勤時間の長さ
c：時間 T 内に輸送できる通路面積あたりの人数
と定義すると，輸送力の方程式として

$$c(S - L(x)) = \rho \int_x^h L(\tau) d\tau \tag{1}$$

を得る．さらにビルの上端には通路が必要ないので境界条件 $L(h) = S$ から，この方程式を解くと

$$L(x) = S \exp\left(\frac{\rho(x-h)}{c}\right) \tag{2}$$

となり，これを積分するとビル全体から通路を除いた容積 (有効容積) が

$$V_h = \frac{cS}{\rho}\left(1 - \exp\left(-\frac{\rho h}{c}\right)\right) \tag{3}$$

のように与えられる．

3　内々交通モデル

次に，ビル内にいる全ての人が均等に行き来する場合の相互に移動するモデルを考える．各人が自分と異なる階にいる人と時間 T 内に何人に 1 人と行き来するかの割合を b とおくと，今回は高さ x の面を通過する交通量は，x よりも上にいる人と下にいる人との行き来によるものなので，以下の式が得られる．

$$c(S - L(x)) = b\rho^2 \int_x^h L(\tau)\tau \int_0^x L(\tau) d\tau \tag{4}$$

境界条件は，ビルの上端と下端で通路が必要ないことから $L(0) = L(h) = S$ となる．ここで式 (4) は直接解くのは難しいため，$V(x) = \int_0^x L(\tau)\tau$ とおいて，$V(x)$ に関する常微分方程式を導き，それを解くと

$$V(x) = \frac{1}{2}V_h + \sqrt{\alpha S - \frac{1}{4}V_h^2} \times \tan\left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha S - \frac{1}{4}V_h^2}\left(x - \frac{h}{2}\right)\right) \tag{5}$$

を得る．ただしここで $\alpha = \dfrac{c}{b\rho^2}$ とおいた．この式を微分したものに $x = h$ における境界条件を代入して V_h に関して整理すると

$$V_h = 2\sqrt{\alpha S}\sin\left(\frac{h}{2\alpha}\sqrt{\alpha S - \frac{1}{4}V_h^2}\right) \tag{6}$$

となるので，ここから適当な数値解法によって近似解を求めればよい．

4　高さと有効容積の関係

ここで，(2)，(3) によって導いた有効容積が，高さを限りなく上げていった場合にどうなるかを考える．まず通勤交通においては (3) 式において $\exp(-\infty) = 0$ より，

$$V_\infty = \frac{cS}{\rho} \tag{7}$$

となる．次に内々交通の場合は，(6) 式より明らかに

$$V_\infty = 2\sqrt{\alpha S} \tag{8}$$

である．よって以上から有効容積に関して，面積には比例して増加するので投資は有効といえるが，高さに関しては，ある一定以上から影響を及ぼさないことがわかる．そこで実際に内々交通において，実際にパラメータを与えて有効容積の変化を数値解析した．

各パラメータの定め方は, 密度 ρ は標準的なオフィスの値から $\rho = 0.03$ (人/m^3) とおき，パラメータ b ($1/(\mathrm{m}^2)^2$ 人) は 10^{-5} とした．次に c は [1] から $c = 35$ (人/m^2/T) と推定し，$S = 200^2$（m^2）としている．
統計用ソフト R を用いて方程式 (6) の解を二分法で計算したところ，図 2 の結果が得られた．また実際に式 (8) に数値を入れて計算すると，2494438m^3 となり，これが図 2 の漸近線といえる．

またほぼ変化が無くなる高さとしては，高さを 1m 増やすごとに有効容積の増加が $1\mathrm{m}^3$ 以下になる場所として計算すると 2132m から変化が無いことがわかった．そして，増加する値が $1000\mathrm{m}^3$ 以下になる場所を計算したところ，204m となり，図 3 のようになった．これを全体の容積で割った図が図 4 であり、200m を越えたあたりから比率として 2 割以下になっていることがわかる．また，図 3 は例として面積を $200\mathrm{m}^2$ としたが，その面積を $100\mathrm{m}^2$ から $900\mathrm{m}^2$ まで $100\mathrm{m}^2$ ずつ変化させながら，その違いを見たのが図 5 である．

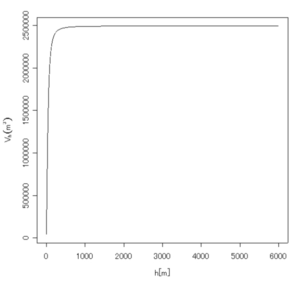

図 2　6000m までの有効容積

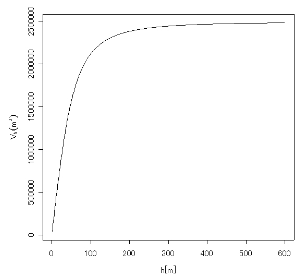

図 3　600m までの有効容積

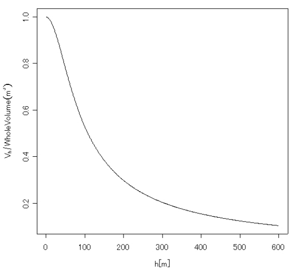

図 4　有効容積/全体容積

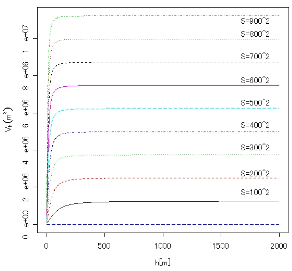

図 5　面積の変化と有効容積

5　通過エレベータを含む通勤交通モデル

今までの考え方ではエレベータは全てが各階に停止すると仮定して考えていたが，実際のビルのエレベータは層に分かれて動いている．そこでビルを分けて，その層内で各停止するエレベータと通過するエレベータの 2 つを考えることにする．まず簡単にするため，2 層で考える．図 6 はこのモデルを図式化したものであり，実線が停止エレベータ，破線が通過エレベータを表している．

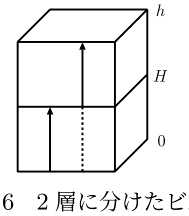

図 6　2 層に分けたビル

この考え方に基づいて，
h：ビル全体の高さ
H：下層と上層の境界の高さ
x：地上から測ったある場所の高さ
S：床全体の面積
$L(x)$：有効床面積．高さ x において床面積 S からエレベータ通路を除いた面積
ρ：単位高さあたりの人口
とおくと，交通量の式は

$$c(S-L(x)) = \begin{cases} \rho \displaystyle\int_x^h L(\tau)d\tau \quad (H<x<h) \\ \rho \displaystyle\int_x^H L(\tau)d\tau + \rho \int_H^h L(\tau)d\tau \quad (0<x<H) \end{cases} \tag{9}$$

となる．ここで $H < x < h$ のとき，$L(x)$ は (2) より $L(x) = S\exp\left(\dfrac{\rho(x-h)}{c}\right)$ となる．
そして $0 < x < H$ のときの $L(x)$ は，(9) 下式を微分して，境界条件から，$\alpha = S\exp\left(\frac{-(H+h)\rho}{c}\right)$ を代入して，

$$L(x) = S\exp\left(\frac{2\rho x-\rho(H+h)}{c}\right) \quad (0<x<H) \tag{10}$$

となる．よって有効容積は

$$V_h = \int_0^H L(x)dx + \int_H^h L(x)dx \tag{11}$$

となる．ここで，

$$\int_0^H L(x)dx = \frac{c}{\rho}S\left[\exp\left(\frac{2\rho H-\rho h}{c}\right) - \exp\left(-\frac{\rho h}{c}\right)\right] \tag{12}$$

となるので，式 (12) を式 (11) に代入して，有効容積は

$$V_h = \frac{cS}{\rho}\left(1+\exp\left(\frac{\rho(h-H)}{c}\right) + \exp\left(\frac{2\rho H-\rho h}{c}\right) + \exp\left(\frac{\rho h}{c}\right)\right) \tag{13}$$

となる．そこで次に 3 層で考える．図 7 において，

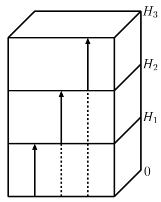

図 7　3 層に分けたビル

H_1：下層と中層の境界の高さ
H_2：中層と上層の境界の高さ
H_3：全体の高さ
とすると，上層と中層の関係式は 2 層の考え方と全く同じため，式 (9) から

$$c(S-L(x)) = \rho\int_x^{H_3} L(\tau)d\tau \quad (H_2<x<H_3) \tag{14}$$

$$c(S-L(x)) = \rho\int_x^{H_2} L(\tau)d\tau + \rho V_{H_3,H_2} \quad (H_1<x<H_2) \tag{15}$$

がいえる．下層については，2 層の考え方から

$$c(S-L(x)) = \rho\int_x^{H_1} L(\tau)d\tau + \rho V_{H_3,H_1} \quad (0<x<H_1) \tag{16}$$

となることが予想され，さらに発展させて一般形の n 層ビルの最下層が

$$c(S-L(x)) = \rho\int_x^{H_1} L(\tau)d\tau + \rho V_{H_n,H_1} \tag{17}$$

と推測される．しかし，この式の証明は難解なため，別の視点からこの問題を考える．

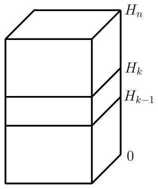

図 8　n 層に分けたビル

今, 図 8 のような一般形のビルを考えたときに, $W_{k,n} = H_k \sim H_n$ の有効容積とおくと、

$$W_{k-1,n} = W_{k-1,k} + W_{k,n} \tag{18}$$

がいえる．ここで

$$\begin{aligned} W_{k-1,k} = \{ & (k-1 \sim k \text{ 区間の全容積}) \\ & -(H_{k-1} \text{から } H_k \text{で各階停止するエレベータ容積})\} \\ & -(H_k \text{より上に行く通過エレベータ容積}) \end{aligned} \tag{19}$$

であり，さらに H_k より上に行く通過エレベータ容積は人が乗降しないため，交通量の変化が起きないので，H_k より上に行く通過エレベータ容積と，H_{k-1} から H_k で各階停止するエレベータ容積のモデル図はそれぞれ図 9 のようになる．

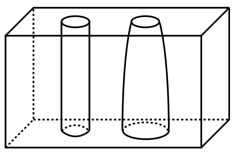

図 9　通過エレベータと停止エレベータのモデル

ここで式 H_{k-1} から H_k で各階停止するエレベータ通路容積は前章の通勤交通モデル (3) より

$$V = \frac{cS}{\rho}\left(1 - \exp\left(-\frac{\rho(H_k - H_{k-1})}{c}\right)\right) \tag{20}$$

となる．H_k より上に行く通過エレベータ通路容積については，エレベータ容積が (本数) × (高さ) × (底面積) なので

$$V = (n-k)(H_k - H_{k-1})S\left(1 - \exp\left(-\frac{\rho(H_k - H_{k-1})}{c}\right)\right) \tag{21}$$

となる．よって以上から

$$\begin{aligned} W_{k-1,k} = & \frac{cS}{\rho}\left(1 - \exp\left(-\frac{\rho(H_k - H_{k-1})}{c}\right)\right) \\ & -(n-k)(H_k - H_{k-1})S \\ & \times\left(1 - \exp\left(-\frac{\rho(h_k - H_{k-1})}{c}\right)\right) \end{aligned} \tag{22}$$

となり，ここで $W_{k-1,n} = F_{k-1}, W_{k-1,k} = B_{k-1}$ とおくと，(18) 式が

$$F_{k-1} = B_{k-1} + F_k \quad (F_n = 0) \tag{23}$$

という漸化式になるので，これを数値解析で解けばよい．

ここで実際に解いた図を図 10 として載せた．各パラメータの値は (4) の値に準じている．また 1 層の高さは一定として 40m とした．

ここで図 10 を見ると，高さが 1000m を超えたあたりで有効容積が下降しているのがわかる．実際に漸化式の計算途中においても表 1 から高さ 1200m 付近で値が減少している．

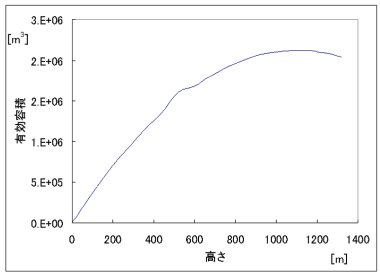

図 10　200^2 m^2 における有効容積

表 1　n=25〜33 における有効容積

n	27	29	30	31	33
F_0	2121884	2116210	2105043	2088203	2037682
h_n	1080	1160	1200	1240	1320

これをさらに詳細に調べるため，n=31 のときの F_k, 及び B_k を表 2 に載せた．この表によると，k=3 を境に B_k が負になっていることがわかる．よって漸化式が $F_{k-1} = B_{k-1} + F_k$ より F_0 の値が n が大きくなるにつれて減少することがわかった．これがどういう意味なのか考えると，エレベータ容積がその層における全体容積を上回ってしまったということが考えられる．今回の定義において，通過エレベータは n が増加されるたびに単調に増加している．ここで上限を考えなかったため，通過エレベータの容積が全体容積を上回ってしまった．しかし，この問題は B_k の負の値を全て 0 と置き換えることで解決できる．すると，(4) においては，高さを増加すればするほど，ほぼ漸近線に近づいていく単調増加として考えられたが，この定義ではある高さを超えると，それ以降の増設が全くの無駄であることがわかる．これは非常に興味深い結果といえよう．

表 2　n=31 のときの F_k 及び B_k

F_0	2088203	B_0	−16840.3
F_1	2105043	B_1	−11226.9
F_2	2116270	B_2	−5613.45
F_3	2121884	B_3	0
F_4	2121884	B_4	5613.449
F_5	2116270	B_5	11226.9
F_6	2105043	B_6	16840.35
・・・		・・・	
F_{31}	0	B_{31}	0

6　通過エレベータを含む内々交通モデル

内々交通に関しては，通過エレベーターの概念を加えると，その難解さは飛躍的に上昇するため，本研究では 2 層での考え方にとどまった．前章の b と同じようにパラメータを考えるが，今回は 2 層にまたがるので

b：層内の人が単位時間内に何人に１人と行き来するかの割合

e：下層にまたがる，単位時間内に何人に１人と行き来するかの割合

とおく．$H_1 < x < H_2$ に関しては図 11 のようなモデルになり，このときの交通量は，上層内で x よりも高い位置

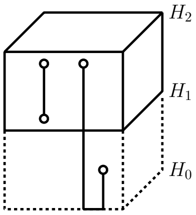

図 11　上層

と低い位置で行き来するための交通量

$$b\rho^2 \int_{H_1}^{x} L(\tau)d\tau \int_{x}^{H_2} L(\tau)d\tau \tag{24}$$

と，上層内の x より高い位置と H_0-H_1 区間の間で行き来するための交通量

$$e\rho^2 \int_{x}^{H_2} L(\tau)d\tau \int_{H_0}^{H_1} L(\tau)d\tau \tag{25}$$

の２通りがあると考えられる．また $H_0 < x < H_1$ に関しては図 12 のようなモデルになり，

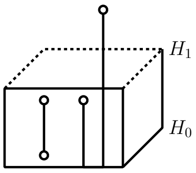

図 12　下層

　このときの交通量は下層内で x よりも高い位置と低い位置の間で行き来するための交通量

$$b\rho^2 \int_{x}^{H_1} L(\tau)d\tau \int_{H_0}^{x} L(\tau)d\tau \tag{26}$$

と下層で x よりも低い位置と上層の間で行き来するための交通量

$$e\rho^2 \int_{H_0}^{x} L(\tau)d\tau \int_{H_1}^{H_2} L(\tau)d\tau \tag{27}$$

と下層で x よりも高い位置と上層の間で行き来するための交通量

$$2e\rho^2 \int_{x}^{H_1} L(\tau)d\tau \int_{H_1}^{H_2} L(\tau)d\tau \tag{28}$$

の３通りがあると考えられる．よって全体としては

$$c(S-L(x)) = \begin{cases} b\rho^2 \int_{H_1}^{x} L(\tau)d\tau \int_{x}^{H_2} L(\tau)d\tau \\ +b\rho^2 \int_{x}^{H_2} L(\tau)d\tau \int_{H_0}^{H_1} L(\tau)d\tau \quad (H_1 < x < H_2) \\ b\rho^2 \int_{x}^{H_1} L(\tau)d\tau \int_{H_0}^{x} L(\tau)d\tau + e\rho^2 \int_{H_1}^{H_2} L(\tau)d\tau \\ \times \left(\int_{x}^{H_1} L(\tau)d\tau + \int_{H_0}^{H_1} L(\tau)d\tau \right) \quad (H_0 < x < H_1) \end{cases} \tag{29}$$

となる．ここで内々交通は，必ず $V' = AV^2 + 2BV + C$ の形になるので，これを解く公式を考える．

case1.　$B^2 - AC > 0$

このとき $D^2 = \dfrac{B^2}{A} - C$ とおくと

$$\left| 1 - \frac{2D}{\sqrt{A}\left(V + \frac{B}{A}\right)} \right| = \exp(2\sqrt{A}D + (x+J)) \tag{30}$$

case2.　$B^2 - AC < 0$

このとき $D^2 = \dfrac{-B^2}{A} + C$ とおくと

$$V = -\frac{B}{A} + \frac{D}{\sqrt{A}} \tan(D\sqrt{A}(x+J)) \tag{31}$$

case3.　$B^2 - AC = 0$

$$V = -\frac{B}{A} - A(x+J) \tag{32}$$

ただし J は積分定数である．この公式に当てはめて，式 (29) を解けば，２層における有効容積の方程式を導ける．例として (4) の値を入れた場合は，case2. になることがわかった．

7　おわりに

　今回の研究で，ある一定上の高さからは、それ以上の増築が意味の無いことがわかった．そして通過エレベータを含めた場合は，有効容積の変化がほぼなくなる高さが，各階停止エレベータだけの場合と比べて，約半分になることがわかった．また今後さらに発展させたい内容としては，今回の研究において，通過エレベータを含む内々交通の２層における方程式を考えたが，この考えは複雑な数式が出てきただけで，あまり有効とはいえなかった．近似解などを用いてもっと素早く数値解析が出来る方法を考えたい．そしてそれとは別に，通過エレベータを含む内々交通の n 層における一般階を導きたい．また今回の研究は実データでの検証を行わなかったため，研究結果がはっきりと伝わらなかった感がある．実際のビルのデータを用いて，今回の研究で出た結論を検証すれば，より面白い研究となるであろう．

参考文献

[1] 奥平耕造：都市工学読本, 彰国社,1976.

[2] 田口東：大規模超高層ビルにおける内々交通とエレベータ通路, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.37, No.3, pp.232-241 (1994.9).