日経225オプションによるヘッジング

M2004MM021 加藤　禎大
指導教員　伏見　正則

1　はじめに

オプション価格の導出に用いられる Black/Scholes (1973) モデルでは, ボラティリティと呼ばれる原資産価格変化率の 2 次のモーメントは満期まで一定であると仮定される. 近年ボラティリティは日々確率的に変動するという考えが主流になってきており, そうしたボラティリティの変動を明示的に定式化するものをボラティリティ変動モデルという. 本論文ではこのボラティリティ変動モデルを使って日経 225 オプション価格とそのヘッジパラメータを計算し, どのモデルが一番ヘッジングに適しているかを比較する.

2　ボラティリティ変動モデルによるオプション価格付けモデル

2.1　ボラティリティ変動の定式化

本論文では, ボラティリティ変動の定式化として, GARCH, EGARCH モデルを用いる. そこて, まず最初にこれらのモデルについて説明を行う.

まず, 収益率 (または, 価格変化率) R_t を $t-1$ 期において予測可能な変動 μ_t と予測不可能な変動 ϵ_t の和

$$R_t = \mu_t + \epsilon_t \tag{1}$$

として表す. 以下では, μ_t を期待収益率, ϵ_t を予測誤差と呼ぶ. ボラティリティ変動モデルでは, さらに予測誤差 μ_t を, 常に非負の値をとる σ_t と期待値 0, 分散 1 の過去と独立で同一な分布に従う確率変数 z_t との積

$$\begin{aligned}\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0, \quad z_t \sim i.i.d.,\\ \mathrm{E}(z_t) = 0, \mathrm{Var}(z_t) = 1\end{aligned} \tag{2}$$

として表す. この σ_t の 2 乗した σ_t^2 を R_t のボラティリティと呼ぶ.

ボラティリティ σ_t の変動の定式化として最もよく用いられているのは, Engle (1982) によって提案された ARCH モデルを一般化した Bollerslev (1986) の GARCH モデルである. ボラティリティの変動を定式化する上で必ず考慮に入れなければならないことは, ボラティリティのショックには持続性があり, ボラティリティが上昇 (低下) した後にはボラティリティが高い (低い) 期間がしばらく続くことである. こうしたボラティリティに対するショックの持続性を考慮し, GARCH モデルを用いる.

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \quad \beta, \alpha \geq 0. \tag{3}$$

ここで、パラメータに非負制約を課すのは σ_t^2 の非負性を保証するためである.

GARCH モデルを改良するに当たって注目されたのが, 株式市場で観測されるボラティリティ変動の非対称性である. 株式収益率のボラティリティは, 株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方が上昇する傾向があることが経験的に知られており, それを考慮した Nelson (1991) の提案した EGARCH モデルを用いる.

GARCH モデルでは, 左辺を σ_t^2 にしていた. これに対して, Nelson (1991) の提案した EGARCH モデルでは, 左辺を $\ln(\sigma_t^2)$ にする. こうすることにより, パラメータに非負制約が必要なくなるだけでなく, 負の値をとり得るような変数でも右辺に説明変数として加えることが可能になる. EGARCH モデルでは過去の収益率の予測誤差 ϵ_{t-1} をボラティリティ σ_{t-1}で割って基準化した $z_{t-1}(=\epsilon_{t-1}/\sigma_{t-1})$ を右辺に加えることにより, ボラティリティ変動の非対称性を捉えようとしている. 本論文の分析では, 次のような EGARCH モデルを用いる.

$$\begin{aligned}\ln(\sigma_t^2) =& \omega + \beta\ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma z_{t-1}\\ &+ \alpha(|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|).\end{aligned} \tag{4}$$

この式は,$z_{t-1} > 0$ であれば,

$$\begin{aligned}\ln(\sigma_t^2) =& \omega + \beta\ln(\sigma_{t-1}^2) + (\alpha+\gamma)|z_{t-1}|\\ &- \alpha E(|z_{t-1}|).\end{aligned}$$

となるのに対して, $z_{t-1} < 0$ であれば,

$$\begin{aligned}\ln(\sigma_t^2) =& \omega + \beta\ln(\sigma_{t-1}^2) + (\alpha-\gamma)|z_{t-1}|\\ &- \alpha E(|z_{t-1}|).\end{aligned}$$

となる. そこで, EGARCH モデルでは,$\gamma < 0$ であれば, 予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになる.

2.2　期待収益率の定式化

オプション価格の導出では, ボラティリティの定式化だけでなく, (1) 式の期待収益率 μ_t をどのように定式化するかが重要になる. 本論文では, 投資家の危険中立性を仮定した定式化を行う. 本論文では, 原資産の $t-1$ 期から t 期の収益率 (価格変化率) を $R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$ で定義する. ただし, S_t, S_{t-1} は t 期と $t-1$ 期の原資産価格を表す. 収益率をこのように定義すると, 投資家の危険中立性を仮定した場合には, 期待収益率 μ_t は安全資産の金利 r と等しくなければならないので, (1) 式は,

$$R_t = r + \epsilon_t. \tag{5}$$

となる. 本論文では, 安全資産の金利 r にはコールレート (無担保) を用いている.

2.3 誤差項の分布

誤差項 z_t は平均 0, 分散 1 の過去と独立で同一な分布に従うというだけで, 具体的な分布については仮定してこなかった. 資産収益率の分布は正規分布よりも裾が厚いことが古くから知られている. そこで, 本論文では, z_t の分布として, 標準正規分布だけでなく, 分散を 1 に基準化した t 分布も用いる. ただし, その場合には, t 分布の自由度 ν も未知パラメータとして推定する. また, EGARCH モデル (4) 式の右辺にある $E(|z_t - 1|)$ は, z_t が標準正規分布に従う場合には $\sqrt{2/\pi}$, 基準化した t 分布に従う場合には $\sqrt{(\nu-2)/\pi}\Gamma((\nu-1)/2)/\Gamma(\nu/2)$ である.ただし, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表す.

本論文では, GARCH モデルと EGARCH モデルの誤差項が正規分布のモデル（以下では GARCH-n, EGARCH-n とする）と GARCH モデルと EGARCH モデルの誤差項が t 分布のモデル（GARCH-t, EGARCH-t) を利用してオプション価格の導出およびヘッジングを行う.

2.4 オプション価格の導出方法

投資家が危険中立的な場合, ヨーロッパ型オプションの価格は満期におけるオプション価格の期待値を安全資産の金利 r で割り引いた割引現在価値となる. すなわち, T 期が満期で権利行使価格 K のコール・オプション, プット・オプションの t 期の価格 C_t, P_t は次のように表される.

$$C_t = (1+r)^{-(T-t)}\mathrm{E}[\mathrm{Max}(S_T - K, 0)], \qquad (6)$$
$$P_t = (1+r)^{-(T-t)}\mathrm{E}[\mathrm{Max}(K - S_T, 0)]. \qquad (7)$$

ここで, S_T はオプションの満期 T 期の原資産価格である. ボラティリティ変動モデルを利用する場合, 右辺の期待値は解析的に求められないので, シミュレーションによって評価する. S_T のシミュレーションを行い,$(S_T^{(1)}, ..., S_T^{(n)})$ が得られたとする. n が十分大きければ, 期待値は以下の式によって評価できる.

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\mathrm{Max}(S_T - K, 0)]\\ &\qquad \approx \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Max}(S_T^{(i)} - K, 0), \qquad (8)\\ &\mathrm{E}[\mathrm{Max}(K - S_T, 0)]\\ &\qquad \approx \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Max}(K - S_T^{(i)}, 0). \qquad (9)\end{aligned}$$

EGARCH-n モデル の場合, 以下のアルゴリズムによりオプション価格 C_t, P_t を導出できる.

1) 標本 $\{R_{t-1000}, ..., R_t\}$ を使って, EGARCH-n モデルの未知パラメータを最尤推定する.
2) 互いに独立な標準正規分布から $\{z_{t+1}^{(i)}, ..., z_T^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする.
3)2) でサンプリングされた値を EGARCH-n モデルに代入して, $\{R_{t+1}^{(i)}, ..., R_T^{(i)}\}_{i=1}^n$ を計算する. ただし, 未知パラメータの値は 1) で推定された値とする.
4) 次の式を使ってオプションの満期 T 期における原資産価格 $(S_T^{(1)}, ..., S_T^{(n)})$ を計算する.

$$S_T^{(i)} = S_t\prod_{s=t+1}^{T}(1 + R_s^{(i)}),\ i = 1, ..., n. \quad (10)$$

5) 次の式からオプション価格 C_t, P_t を計算する.

$$C_t \approx (1+r)^{-(T-t)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Max}(S_T^{(i)} - K, 0),$$
$$P_t \approx (1+r)^{-(T-t)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Max}(K - S_T^{(i)}, 0).$$

GARCH-n モデルでも同様にオプション価格を導出できる.

EGARCH-t モデルの場合には, 上のアルゴリズムの 1)-3) を次のように書き換えるだけでよい.

1') 標本 $\{R_{t-1000}, ..., R_t\}$ を使って, EGARCH-t モデルの未知パラメータを最尤推定する.
2') 互いに独立な分散 1 に基準化された自由度 ν の t 分布から $\{z_{t+1}^{(i)}, ..., z_T^{(i)}\}_{i=1}^n$ をサンプリングする. ただし、ν は 1') で推定された値とする.
3')2') でサンプリングされた値を EGARCH-t モデルに代入して, $\{R_{t+1}^{(i)}, ..., R_T^{(i)}\}_{i=1}^n$ を計算する. ただし, 未知パラメータの値は 1') で推定された値とする.

2.5 準乱数の利用

本論文では、上のアルゴリズムに従ってオプション価格を計算する際に、準モンテカルロ法を用いる. 準乱数としては、Faure による多次元の low-discrepancy 列を用いる.low-discrepancy 列は, $\bar{\mathrm{I}}^k := [0,1]^k$ で一様に分布する確率変数の期待値計算に使われる点列である. したがって準モンテカルロ法で, 多次元正規分布や多次元 t 分布に従う確率変数を扱うためには, 逆関数法を使って, $\bar{\mathrm{I}}^k$ で一様に分布する確率変数の問題に変換する. ボラティリティ変動モデルでヨーロピアン・コール・オプション価格を求めるとき, そのペイオフ関数は (8) であり, これは満期 T の株価にのみ左右されるので, その関数は T 次元の関数 $f(x_1, x_2, ..., x_T)$ で表せる. x_t が平均ゼロ, 分散 σ_t^2 の正規分布に従うとき, その期待値 $\mathrm{E}[f(x_1, x_2, ..., x_T)]$ は

$$\begin{aligned}&E[f(x_1, x_2, ..., x_T)] =\\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_T)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}\\ &\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}}e^{-\frac{x_T^2}{2\sigma_T^2}}dx_1dx_2\cdots dx_T \qquad (11)\end{aligned}$$

となる. また正規分布の分布関数を

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz$$

とおいて,

$$y_t = \Phi(x_t) \quad (t = 1, ..., T)$$

とすると, 定積分 (11) は変数変換

$$x_t = \Phi^{-1}(y_t) \quad (t = 1, ..., T) \tag{12}$$

により区間 $[0,1]^T$ の定積分

$$\mathrm{E}[f(x_1, x_2, ..., x_T)] = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\Phi^{-1}(y_1), \Phi^{-1}(y_2), ..., \Phi^{-1}(y_T)) dy_1 dy_2 \cdots dy_T \tag{13}$$

となる. (12) 式の逆関数 $\Phi^{-1}(y_t)$ は解析的には求まらないので次の近似式を用いる.

正規分布のパーセント点の近似式 (山内 (1965) の近似式):

$$u(Q) = [y(2.0611786 - \frac{5.7262204}{y + 11.640595})]^{\frac{1}{2}}, (0 < Q \leq 0.5)$$
$$y = -\ln[4Q(1-Q)].$$
$$Q \text{ : 上側確率, } u(Q) \text{ : パーセント点} \tag{14}$$

定積分 (13) は T 次元の low-discrepancy 列 $\{u_i\} = \{(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, ..., u_i^{(T)})\}$ により評価できる. 解は

$$\mathrm{E}[f(x_1, x_2, ..., x_T)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(\Phi^{-1}(u_i^{(1)}), \Phi^{-1}(u_i^{(2)}), ..., \Phi^{-1}(u_i^{(T)})\right) \tag{15}$$

で得られる.

また, 自由度 ν の t 分布に従うときも逆関数は解析的には求まらないので次の近似式を用いる. ただし, 以下で言う u は上の正規分布のパーセント点の近似式に出てきた $u(Q)$ のことである.

自由度 ν の t 分布のパーセント点の近似式 (山内 (1968) の近似式):

$$t(\nu) \quad u + \frac{Y_1(u)}{\nu} + \frac{Y_2(u)}{\nu^2} + \ldots + \frac{Y_i(u_\alpha)}{\nu^i}$$
$$Y_1(u) = \frac{1}{2^2}(u^3 + u)$$
$$Y_2(u) = \frac{1}{2^5 \cdot 3}(5u^5 + 16u^3 + 3u)$$
$$Y_3(u) = \frac{1}{2^7 \cdot 3}(3u^7 + 19u^5 + 17u^3 - 15u)$$
$$Y_4(u) = \frac{1}{2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5}(79u^9 + 776u^7 + 1,482u^5 - 1,920u^3 - 945u)$$
$$Y_5(u) = \frac{1}{2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5}(27u^{11} + 339u^9 + 930u^7 - 1,782u^5 - 765u^3 + 17,955u)$$

ただし, この近似式によって発生させた自由度 ν の t 分布の乱数は, 平均 0, 分散 $\nu/(\nu-2)$ であるので, この分散が σ_t^2 等しくなるような自由度 ν_t をその都度選ぶ必要がある.

3 ヘッジ戦略

3.1 デルタ・ヘッジと戦略

ヘッジとは, 株式とコール・オプションのように相反するポジションを適切に組み合わせることで, 現資産価格の変動に対応するポートフォリオの価値の変動を減少させることを指す. デルタ・ヘッジは, コールオプションが現資産価格によって左右するため, 現資産価格の変化に対するコールオプションの変化の比率をデルタ (Δ) としたとき, デルタ分原資産を購入 (売却) し, 1 単位コールオプションを発行 (購入) することによって, 次の時点までの変化を 0 にする戦略である. 具体的には次のような式が成り立つ.(プット・オプションでも可能だが本論文では扱わない)

$$\Delta_t = \frac{C_{t+1} - C_t}{S_{t+1} - S_t} \tag{16}$$

ここで, Δ_t は t 時点のデルタである. 本論文では一ヶ月間このデルタ・ヘッジを行い, デルタの値を時点ごとに変化させ, ポートフォリオを組み直していき, モデルのパフォーマンスを分析する. 本論文でのデルタ・ヘッジの目的は2つあり, パフォーマンスの分析とそこからどれだけ利益を得るかである. パフォーマンスの分析では, 実際のオプション価格の値は関係なく, モデルによって得たオプションの理論値とデルタの値によって, どれだけ株式がヘッジされるかをみればよい. 利益を得るには, 実際のオプション価格の値と理論値との差額を, どれだけ利益に結びつけるかを考えるため, 本論文では次のような考え方でヘッジングを行う.

1) 実際のオプション価格 (C_t) とモデルによって得た理論値 ($\hat{C}_t$) とを比較する.
2)$\hat{C}_t < C_t$ なら実際のオプション価格は高いと判断できるので, オプションを発行し, 株式をデルタ分だけ購入し, 差額の利益を得ることを考える.
$\hat{C}_t > C_t$ なら実際のオプション価格は安いと判断できるので, オプションを購入し, 株式をデルタ分だけ売り, 差額の利益を得ることを考える.

3)1)2) を繰り返して満期までポジションを変化させていく.

ポジションが逆転した日には, 一度ポジションを開放させた上で, 改めてポジションを持つことにする.

3.2 ヘッジパラメータの算出

(16) 式のデルタの値は, 連続モデルでは次のようになる.

$$\Delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial St}$$

本論文では, サンプル・ペイオフを微分する方法によってデルタの値を求める. i 番目のサンプル・ペイオフは

$$C_T^{(i)} = (1+r)^{-(T-t)} \mathrm{Max}(S_T - K, 0)$$

となる．サンプル・ペイオフ $C_T^{(i)}$ の S_t による微分によって求まるサンプル・デルタは, $S_T^{(i)}$ を介する合成関数の微分を用いて

$$\Delta_t^{(i)} = \frac{\partial C_T^{(i)}}{\partial S_t} = \frac{\partial C_T^{(i)}}{\partial S_T^{(i)}} \frac{\partial S_T^{(i)}}{\partial S_t} \tag{17}$$

のようにできる．

$$\frac{\partial C_T^{(i)}}{\partial S_T^{(i)}} = (1+r)^{-(T-t)} 1_{\{S_T^{(i)} \geq K\}} \tag{18}$$

である．ただし $1_{\{S_T^{(i)} \geq K\}}$ は $S_T^{(i)} \geq K$ のとき 1 をとり, それ以外では 0 である．また, 式 (12) より

$$\frac{\partial S_T^{(i)}}{\partial S_t} = \frac{S_T^{(i)}}{S_t} \tag{19}$$

となる．(17)(18)(19) より

$$\Delta_t^{(i)} = \frac{\partial C_T^{(i)}}{\partial S_t} = (1+r)^{-(T-t)} 1_{\{S_T^{(i)} \geq K\}} \frac{S_T^{(i)}}{S_t} \tag{20}$$

となる．このサンプル・デルタをシミュレーションのパスごとに計算し, その期待値を計算すればデルタが得られる．デルタを算出するアルゴリズムはオプション価格を計算する際のアルゴリズムに次の手順を加えることで求められる．(2.5 節の右段のアルゴリズム 5) の続き)
6) 次の式からデルタを算出する

$$\Delta_t \approx (1+r)^{-(T-t)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{S_T^{(i)} \geq K\}} \frac{S_T^{(i)}}{S_t} \tag{21}$$

3.3 ヘッジングの比較

どのモデルがヘッジングのパフォーマンスが良いかを比較する指標には, 平均誤差 (Mean Error ; ME) と平均 2 乗誤差 (Root Mean Square Error ; RMSE) を用いる．これらは, 次のように定義される．

$$ME = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^{T-1} \{(\Delta_t S_t - C_t) - (\Delta_t S_{t+1} - C_{t+1})\},$$

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{T-1} \{(\Delta_t S_t - C_t) - (\Delta_t S_{t+1} - C_{t+1})\}^2}$$

これを 36 ヶ月分調べてパフォーマンスを分析する．ME によってバイアスの有無を, RMSE によって理想（リスク 0）からの乖離度を比較する．

4 結論

ヘッジングのパフォーマンスについて分析した結果, 次の結論が得られた．

1) 全ての行使価格で日経 225 変化率の誤差項の分布を正規分布よりも t 分布にしたほうがヘッジングのパフォーマンスはよい．

2) 日経 225 変化率のボラティリティの非対称性を考慮した EGARCH モデルと, 考慮してない GARCH モデルでは, ボラティリティの高さによってパフォーマンスが変わってくる．

3) 行使価格の高いオプションをヘッジングに利用すると, 投資額が低い分安定しているが, 利益も少なく, 異常に株価が変動する月には大きく損失する恐れがある．よって行使価格はある程度低いものをヘッジングに利用するのが適している．

4)4 つのモデルともヘッジングのパフォーマンスに差があるものの, どのモデルでもヘッジングの誤差をオプションの誤差から生まれる利益の範囲内に抑えることができ, 利益を出すことに成功している．ただし, 取引費用等は考えない．

参考文献

[1] 福島雅夫 (1999), 『数理計画入門』, 朝倉書店.

[2] 三井秀俊 (2000), 「日経 225 オプション価格の GARCH モデルによる分析」, 『現代ファイナンス』,No.7, pp.57-73.

[3] 山内二郎 (編)(1972), 『統計数値表』, 日本規格協会.

[4] 湯前祥二・鈴木輝好 (2000), 『モンテカルロ法の金融工学への応用』, 朝倉書店.

[5] 渡部敏明 (2000), 『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉書店.

[6] 渡部 敏明：日経 225 オプションデータを使った GARCH オプション価格付けモデルの検証, 2003/7, `http://www.imes.boj.or.jp/japanese/jdps/jdps2003_index.html`.

[7] Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne,J. 著, 伊藤幹夫, 戸瀬信之訳 (2002), 『デリバティブの数学入門』共立出版株式会社.

[8] Bollerslev,T.(1987),“A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rate of Return,” Review of Economics and Statistics,69, pp.542-547.

[9] Duan,J.-C.(1995), “The GARCH Option Pricing Model,”Mathematical Finance,Vol.5,No.1,pp.13-32.

[10] Joy,C.,Boyle,P.,and Tan,K.-S.(1996), “Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance,” Management Science,Vol.42,No.6,pp.926-938.

[11] 服部隆宏・加藤禎大 (2003),『ボラティリティ変動モデルによる日経 225 オプションの分析』, 南山大学数理情報学部卒業論文.